Nome: .... **RA:** ....

1	
2	
3	
4	
5	

1ª Questão: Seja o sistema linear a tempo contínuo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bw, \\ y &= Cx \end{aligned}$$

cuja norma $\mathcal{H}_2$ pode ser computada pelo seguinte procedimento de otimização baseado em LMIs

$$\min_{P=P'>0} \mathbf{Tr}(CPC')$$

sujeito a

$$A'P + PA + BB' < 0$$

Apresente um procedimento equivalente em termos de LMIs com variáveis adicionais.

2ª Questão: Sejam A, B, C e D matrizes dadas e o seguinte sistema linear associado

$$\dot{x} = \underbrace{(\alpha_1 A + \alpha_2 C + \beta_2 B + D)}_{\mathcal{A}} x, \quad \alpha \in \Lambda_2, \ \beta \in \Lambda_3$$

Apresente as condições LMIs que testam a Hurwitz estabilidade do sistema usando a função de Lyapunov quadrática, isto é, $v(x) = x'Px$. Será levado em conta na nota o conservadorismo da condição.

3ª Questão: Considere o sistema linear incerto contínuo no tempo

$$\dot{x} = A(\alpha)x, \quad \alpha \in \Lambda_N$$

Apresente as condições LMIs dependentes de parâmetros que garantem a estabilidade Hurwitz do sistema usando a função de Lyapunov

$$v(x) = \begin{bmatrix} x' & \dot{x}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2' & P_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$$

4ª Questão: Sejam A, B e C matrizes dadas e $P = P' > 0$, $X = X' > 0$, W variáveis a serem determinadas tais que

$$P > W'W + (A'P - B'PC)(P - X^{-1})^{-1}(PA - C'PB)$$

Formule a busca por P, W e X em termos de uma LMI.

5ª Questão:

(a) Seja o sistema linear discreto no tempo

$$\left\{ \begin{array}{l} x(k+1) = \beta x(k) + 1w(k) \\ y = 1x(k) \end{array} \right. , \qquad \beta \in \mathbb{R}$$

(a.1) Compute a sua norma $\|H\|_2$ para $\beta = \sqrt{0.6}$. (a.2) É possível que esse sistema tenha norma $\|H\|_2^2$ menor do que 1? Justifique.

(b) Seja o sistema linear contínuo no tempo

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bw \\ y = Cx \end{cases}, \qquad \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Compute a sua norma $\|H\|_2$.

Consulta

Lema de Finsler: Considere $w \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ com rank $(\mathcal{B}) < n$ e $\mathcal{B}^\perp$ uma base para o espaço nulo de $\mathcal{B}$ (isto é, $\mathcal{B}\mathcal{B}^\perp = 0$).

Então, as seguintes condições são equivalentes:

(1) $w'\mathcal{Q}w < 0, \ \forall \ w \neq 0 \ : \ \mathcal{B}w = 0$

(2) $\mathcal{B}^{\perp\prime}\mathcal{Q}\mathcal{B}^\perp < 0$

(3) $\exists \mu \in \mathbb{R} \ : \ \mathcal{Q} - \mu\mathcal{B}'\mathcal{B} < 0$

(4) $\exists \mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n \times m} \ : \ \mathcal{Q} + \mathcal{X}\mathcal{B} + \mathcal{B}'\mathcal{X}' < 0$

Complemento de Schur: Considere a matriz quadrada simétrica X particionada

$$X = \begin{bmatrix} A & B \\ B' & C \end{bmatrix}$$

- $X > 0$ se e somente se $A > 0$ e $C - B'A^{-1}B > 0$
- $X > 0$ se e somente se $C > 0$ e $A - BC^{-1}B' > 0$