Nome: .... **RA:** ....

1	
2	
3	
4	
5	

1ª Questão: Seja o sistema linear a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(k+1) = &\ Ax(x) + Bw(k), \\ y = &\ Cx(k) \end{aligned}$$

cuja norma $\mathcal{H}_2$ pode ser computada pelo seguinte procedimento de otimização baseado em LMIs

$$\min_{P=P'>0} \mathbf{Tr}(B'PB)$$

sujeito ao gramiano de observabilidade

$$A'PA - P + C'C < 0$$

(a) Determine $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{B}^{\perp}$ de modo que o gramiano possa ser reescrito na forma $\mathcal{B}^{\perp\prime}\mathcal{Q}\mathcal{B}^{\perp} < 0$.

(b) Determine $\mathcal{B}$, tal que $\mathcal{B}\mathcal{B}^{\perp} = 0$.

(c) Apresente uma LMI alternativa para o gramiano com variáveis de folga usando o Lema de Finsler.

2ª Questão: Sejam A, B, C e D matrizes dadas e o seguinte sistema linear associado

$$\dot{x} = \underbrace{\left(\alpha_1^2 A + \beta_1 B + C\right)}_{\mathcal{A}} x, \quad \alpha \in \Lambda_2,\ \beta \in \Lambda_2$$

sendo Λ_N o simplex unitário de dimensão N.

(a) Apresente a versão homogeneizada da matriz $\mathcal{A}$.

(b) Apresente as condições LMIs que testam a Hurwitz estabilidade do sistema usando a função de Lyapunov quadrática, isto é, $v(x) = x'Px$.

3ª Questão: Seja o sistema discreto

$$x(k+1) = (\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)x,$$

(a) Apresente as LMIs que testam estabilidade Schur desse sistema usando $v(x(k)) = x(k)'(\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2)x(k)$.

(b) (Bônus) Apresente condições menos conservadoras (mais relaxadas) do que as apresentadas no item (a).

4ª Questão: Seja A uma matriz dada e $P = P' > 0$, $X = X' > 0$, $Z = Z' > 0$ e W variáveis a serem determinadas. Formule a busca dessas variáveis em termos de uma LMI para as seguintes desigualdades matriciais

(a)

$$P - W'Z^{-1}W > A'PX^{-1}PA$$

(b)

$$P - W'Z^{-1}W > (A'P - W'Z^{-1})(X - Z^{-1})^{-1}(PA - Z^{-1}W)$$

5ª Questão: Seja o sistema linear

$$\begin{cases} \dot{x} = -\beta x + 3w \\ y = 4x \end{cases}$$

Determine os valores de β de modo que $\|H\|_\infty + \|H\|_2 = 12$.

Consulta

Lema de Finsler: Considere $w \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ com rank $(\mathcal{B}) < n$ e $\mathcal{B}^\perp$ uma base para o espaço nulo de $\mathcal{B}$ (isto é, $\mathcal{B}\mathcal{B}^\perp = 0$).

Então, as seguintes condições são equivalentes:

(1) $w'\mathcal{Q}w < 0, \ \forall \ w \neq 0 \ : \ \mathcal{B}w = 0$

(2) $\mathcal{B}^{\perp\prime}\mathcal{Q}\mathcal{B}^\perp < 0$

(3) $\exists \mu \in \mathbb{R} \ : \ \mathcal{Q} - \mu\mathcal{B}'\mathcal{B} < 0$

(4) $\exists \mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n\times m} \ : \ \mathcal{Q} + \mathcal{X}\mathcal{B} + \mathcal{B}'\mathcal{X}' < 0$

Complemento de Schur: Considere a matriz quadrada simétrica X particionada

$$X = \begin{bmatrix} A & B \\ B' & C \end{bmatrix}$$

- $X > 0$ se e somente se $A > 0$ e $C - B'A^{-1}B > 0$
- $X > 0$ se e somente se $C > 0$ e $A - BC^{-1}B' > 0$