Nome: .... **RA:** ....

1	
2	
3	
4	
5	

$1^{\underline{a}}$ Questão: Seja o sistema linear a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(k+1) = &\ Ax(x) + Bw(k), \\ y = &\ Cx(k) + Dw(k) \end{aligned}$$

cuja norma $\mathcal{H}_2$ pode ser computada pelo seguinte procedimento de otimização baseado em LMIs

$$\min_{P=P'>0, X, \gamma} \gamma$$

sujeito a

$$\gamma > \mathrm{Tr}(X) \tag{1}$$

$$X > B'PB + D'D \tag{2}$$

$$A'PA - P + C'C < 0 \tag{3}$$

(a) Determine $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{B}^{\perp}$ de modo que (2) possa ser reescrita na forma $\mathcal{B}^{\perp\prime}\mathcal{Q}\mathcal{B}^{\perp} < 0$.

(b) Determine $\mathcal{B}$, tal que $\mathcal{B}\mathcal{B}^{\perp} = 0$.

(c) Apresente uma LMI alternativa para (2) com variáveis de folga.

(d) Aplique dois complementos de Schur em (2) e obtenha uma LMI equivalente.

(e) (Bonus) Tente reescrever o resultado de (d) na forma $\mathcal{B}^{\perp\prime}\mathcal{Q}\mathcal{B}^{\perp}$.

$2^{\underline{a}}$ Questão: Seja a LMI

$$A'P_1 + P_1A + A^{2'}P_2' + P_2A^2 + A'(P_2 + P_2')A + A^{2'}P_3A + A'P_3A^2 < 0$$

sendo A uma matriz dada e $P_1 = P_1'$, P_2 e $P_3 = P_3'$ variáveis de otimização.

(a) Reescreva a desigualdade na forma $\mathcal{B}^{\perp\prime}\mathcal{Q}\mathcal{B}^{\perp} < 0$ sendo que $\mathcal{Q}$ deve conter exclusivamente variáveis.

(b) Determine $\mathcal{B}$ tal que $\mathcal{B}\mathcal{B}^{\perp} = 0$

$3^{\underline{a}}$ Questão: Sejam as LMIs dependentes de parâmetros

$$A(\alpha)'P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) < 0, \quad P(\alpha) > 0$$

Considerando $A(\alpha) = \alpha_1A_1 + \alpha_2A_2$ e $P(\alpha) = \alpha_1^2P_{20} + P_{11} + \alpha_2^2P_{02}$

(a) Apresente um conjunto de LMIs para testar as desigualdades apresentadas.

(b) Estenda o método para tratar o gramiano de observabilidade, isto é,

$$\begin{bmatrix} A(\alpha)'P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) & C(\alpha)' \\ C(\alpha) & -\mathrm{I} \end{bmatrix} < 0, \quad P(\alpha) > 0$$

com $C(\alpha) = \alpha_1C_1 + \alpha_2C_2$.

(c) Indique uma maneira de obter condições mais relaxadas (menos conservadoras).

4ª Questão: Transforme as desigualdades a seguir em LMIs nas variáveis de decisão $X = X'$, $Y = Y'$, $Z = Z'$ e W.

(a)
$$X - XY^{-1}X - Z^{-1} > (W' - Z^{-1})(\mathrm{I} - Z^{-1})^{-1}(W - Z^{-1})$$

(b)
$$\mathrm{I} > Y^2 + (X - YZ)(I - Z^2)^{-1}(X - ZY)$$

5ª Questão: Seja o sistema linear a tempo discreto

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= 0.5x_k + \beta w_k \\ y_k &= x_k \end{aligned}$$

(a) A Figura 1 apresenta a resposta ao impulso elevada ao quadrado ($y_\delta(k)^2$) deste sistema. Determine um valor aproximado para β.

(b) Para $\beta = \sqrt{4}$, determine a norma $\mathcal{H}_\infty$ do sistema.

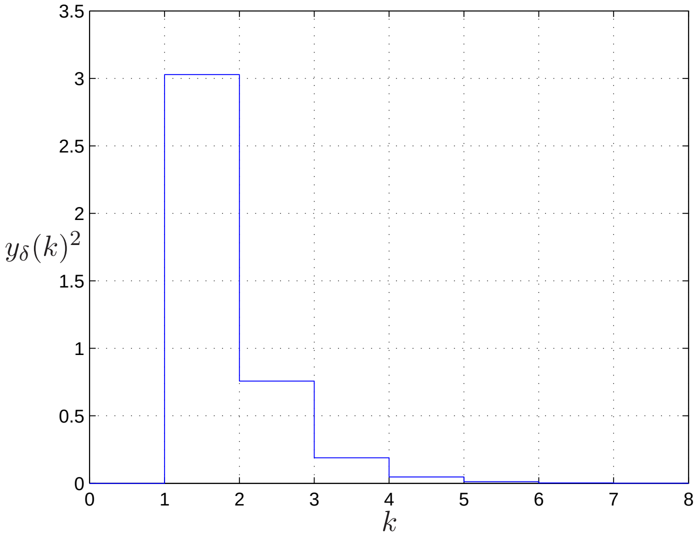

Figura 1: Resposta ao impulso ao quadrado do sistema da Questão 5.

Consulta

Lema de Finsler: Considere $w \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ com rank $(\mathcal{B}) < n$ e $\mathcal{B}^\perp$ uma base para o espaço nulo de $\mathcal{B}$ (isto é, $\mathcal{B}\mathcal{B}^\perp = 0$).

Então, as seguintes condições são equivalentes:

(1) $w'\mathcal{Q}w < 0, \ \forall \ w \neq 0 \ : \ \mathcal{B}w = 0$

(2) $\mathcal{B}^{\perp\prime}\mathcal{Q}\mathcal{B}^\perp < 0$

(3) $\exists \mu \in \mathbb{R} \;:\; \mathcal{Q} - \mu \mathcal{B}'\mathcal{B} < 0$

(4) $\exists \mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n\times m} \;:\; \mathcal{Q} + \mathcal{X}\mathcal{B} + \mathcal{B}'\mathcal{X}' < 0$

Complemento de Schur: Considere a matriz quadrada simétrica X particionada

$$X = \begin{bmatrix} A & B \\ B' & C \end{bmatrix}$$

- $X > 0$ se e somente se $A > 0$ e $C - B'A^{-1}B > 0$
- $X > 0$ se e somente se $C > 0$ e $A - BC^{-1}B' > 0$

Norma $\mathcal{H}_2$ − caso discreto

$$\|H(z)\|_2^2 = \mathbf{Tr}\Big(\sum_{k=1}^{+\infty} y_\delta(k)'y_\delta(k)\Big) = \mathbf{Tr}\Big(\sum_{k=1}^{+\infty} y_\delta(k)y_\delta(k)'\Big) = \mathbf{Tr}\Big(B'L_oB\Big) = \mathbf{Tr}\Big(CL_cC'\Big)$$

com

$$A'L_oA - L_o + C'C = 0, \qquad AL_cA' - L_c + BB' = 0$$

Norma $\mathcal{H}_2$ − caso contínuo

$$\|H(s)\|_2^2 = \int_0^{+\infty} \mathbf{Tr}\big(h(t)'h(t)\big)dt = \int_0^{+\infty} \mathbf{Tr}\big(h(t)h(t)'\big)dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} \mathbf{Tr}\big(B'L_oB\big)dt = \int_0^{+\infty} \mathbf{Tr}\big(CL_cC'\big)dt$$

com

$$A'L_o + L_oA + C'C = 0, \qquad AL_c + L_cA' + BB' = 0$$

Norma $\mathcal{H}_\infty$ − caso contínuo

$$\|H(s)\|_\infty = \max_{\omega\in\mathbb{R}} \sigma_{max}\big(H(j\omega)\big)$$

com σ_i, $i = 1, \dots, \min(m,p)$ (valores singulares de $H(j\omega)$) dados por

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i\left(H(j\omega)^*H(j\omega)\right)} = \sqrt{\lambda_i\left(H(j\omega)H(j\omega)^*\right)}$$

Norma $\mathcal{H}_\infty$ − caso discreto

$$\|H(z)\|_\infty = \max_{\omega\in[-\pi,\pi]} \sigma_{max}\big(H(\exp(j\omega))\big)$$