

Nome: .....

RA: .....

**1ª Questão:** Seja o sistema linear a tempo contínuo

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ADx + Bw, \\ y &= Cx\end{aligned}$$

em que  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  (diagonal) são matrizes dadas.

(a) A estabilidade desse sistema pode ser testada por meio das seguintes LMIs

$$\begin{bmatrix} FAD + D'A'F' & P - F + D'A'G' \\ P + GAD - F' & -G - G' \end{bmatrix} < 0, \quad P > 0$$

em que  $P$  é a matriz de Lyapunov e  $F$  e  $G$  são variáveis de folga. Utilizando alguma ferramenta algébrica apresentada no curso, elimine as variáveis  $F$  e  $G$  de modo que a desigualdade resultante ainda seja válida (pelo menos suficiente) para testar a estabilidade.

(b) Sabe-se que um limitante superior para a norma  $\mathcal{H}_2$  do sistema ( $\gamma$ ) pode ser computado por meio das seguintes LMIs:  $P > 0$ ,  $\gamma > \text{Tr}(X)$ ,  $X > B'PB$  e o gramiano de controlabilidade  $D'A'P + PAD + C'C < 0$ . Introduza variáveis de folga no gramiano.

(c) Introduza variáveis de folga na desigualdade  $\gamma > \text{Tr}(X)$ .

(d) (Bônus) Introduza variáveis de folga no gramiano de modo que a matriz  $A$  não apareça multiplicando a matriz  $D$ .

1	
2	
3	
4	
5	
6	

**2ª Questão:** Seja o sistema contínuo

$$\dot{x} = (\alpha_1 A_{10} + \alpha_2 A_{01} + \alpha_1 \alpha_2 A_{11})x,$$

(a) Apresente as LMIs que testam estabilidade Hurwitz desse sistema usando  $v(x) = x'(P_1 + \alpha_1 \alpha_2 P_2)x$ .

(b) Indique uma possibilidade para tornar as condições apresentadas no item (a) menos conservadoras (mais relaxadas).

(c) (Bônus) Apresente as condições oriundas da indicação feita em (b).

**3ª Questão:** Seja  $A$  uma matriz dada e  $P = P' > 0$ ,  $X = X' > 0$ ,  $Z = Z' > 0$  e  $W$  variáveis a serem determinadas. Utilizando apenas o complemento de Schur, formule a busca dessas variáveis em termos de uma LMI para as seguintes desigualdades matriciais

(a)

$$P - 4Z^{-1} > (A'P - 2Z^{-1}W)(X - W'Z^{-1}W)^{-1}(PA - 2W'Z^{-1})$$

(b)

$$X - W'Z^{-1}W > (I - W')(I - Z)^{-1}(I - W)$$

(c) (Bônus) Repita o exercício (b), mas no resultado final a variável  $Z$  só pode aparecer em um elemento da diagonal.

**4ª Questão:** Seja o sistema linear

$$\begin{cases} \dot{x} = -\beta x + 2w \\ y = x \end{cases}$$

Determine os valores de  $\beta$  de modo que  $\frac{\beta\sqrt{\beta}}{\sqrt{8}}\|H\|_2 - \|H\|_\infty = 1$ .

**5ª Questão:** (a) Comente sobre as diferenças entre uma LMI e uma LMI dependente de parâmetros. (b) Dada uma LMI dependente de parâmetros pertencentes ao simplex unitário, indique os passos necessários para construir uma condição baseada em LMIs que, se verificada, garante que a LMI dependente de parâmetros tem solução.

**6ª Questão:** (Bônus) Seja o sistema incerto

$$\dot{x} = (A_0 + \theta A_1 + \theta^2 A_2) x, \quad \theta \in [-1, 1]$$

Apresente condições LMIs suficientes para testar a estabilidade robusta.

#### CONSULTA

**Lema de Finsler:** Considere  $w \in \mathbb{R}^n$ ,  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$  com  $\text{rank}(B) < n$  e  $B^\perp$  uma base para o espaço nulo de  $B$  (isto é,  $B B^\perp = 0$ ).

Então, as seguintes condições são equivalentes:

- (1)  $w' Q w < 0, \forall w \neq 0 : B w = 0$
- (2)  $B^{\perp'} Q B^\perp < 0$
- (3)  $\exists \mu \in \mathbb{R} : Q - \mu B' B < 0$
- (4)  $\exists X \in \mathbb{R}^{n \times m} : Q + X B + B' X' < 0$

**Complemento de Schur:** Considere a matriz quadrada simétrica  $X$  particionada

$$X = \begin{bmatrix} A & B \\ B' & C \end{bmatrix}$$

- $X > 0$  se e somente se  $A > 0$  e  $C - B' A^{-1} B > 0$
- $X > 0$  se e somente se  $C > 0$  e  $A - B C^{-1} B' > 0$