IA892 – Análise e Controle de Sistemas Lineares por Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs)

Aula 6: Soluções polinomiais para LMIs robustas

Pedro L. D. Peres & Ricardo C. L. F. Oliveira

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas

2^o Semestre 2022

Tópicos

LMIs robustas

Considere o sistema linear invariante no tempo

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x, \quad A(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i A_i, \quad \alpha \in \Omega_N \tag{1}$$

sendo $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrizes dadas e Ω_N um subconjunto compacto do $\mathbb{R}^N$. A estabilidade do sistema (1) pode ser investigada por meio do seguinte teorema.

Teorema 1 (Lyapunov)

O sistema (1) *é (Hurwitz) assintoticamente estável se e somente se existir uma matriz simétrica* $P(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *tal que as seguinte desigualdades matriciais*

$$P(\alpha) > 0, \qquad A(\alpha)'P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) < 0$$

são verificadas para todo $\alpha \in \Omega_N$*.*

- LMIs robustas.
- Questão: Qual estrutura particular para $P(\alpha)$ não perde generalidade?

LMI robustas: forma geral

O problema de factibilidade de dimensão infinita do Teorema 1 pode ser reescrito da seguinte forma:

LMI robusta

$\forall\ \alpha \in \Omega_N,\ \exists\ p \in \mathbb{R}^M$ tal que

$$G(p,\alpha) \triangleq G_0(\alpha) + p_1 G_1(\alpha) + \cdots + p_M G_M(\alpha) > 0 \qquad (2)$$

sendo Ω_N um subconjunto compacto do $\mathbb{R}^N$. As matrizes $G_0(\cdot),\ G_1(\cdot),\ldots,G_M(\cdot)$ são funções definidas em Ω_N, assumindo valores no conjunto das matrizes simétricas de dimensão $\mathbb{R}^{n\times n}$.

- Questão: Sempre que existe $p(\alpha) \in \mathbb{R}^M$ tal que a LMI robusta é verificada então existe uma estrutura particular que pode ser procurada computacionalmente em tempo finito?

Teorema de Existência

Teorema 2 (P.-A. Bliman, SCL, 2004)

Suponha que $G_0(\cdot),\ G_1(\cdot),\ldots,G_M(\cdot)$ *são contínuas. Se para todo* $\alpha \in \Omega_N$ *existe* $p(\alpha) \in \mathbb{R}^M$ *tal que* $G(p(\alpha),\alpha) > 0$, *então existe uma função polinomial* $p(\alpha)^* : \Omega_N \to \mathbb{R}^M$ *tal que, para todo* $\alpha \in \Omega_N$, $G(p^*(\alpha),\alpha) > 0$.

- Em termos do Teorema 1, o resultado do Teorema 2 garante que a matriz de Lyapunov $P(\alpha)$ pode depender polinomialmente de α com grau arbitrário, sem perda de generalidade.

- Se $\Omega_N = \Delta_N$ (simplex unitário), $p(\alpha)^*$ no Teorema 2 pode ser restrito à classe de polinômios homogêneos de grau arbitrário.

Definição 1

Um polinômio é homogêneo se todos os seus monômios tiverem o mesmo grau. Por exemplo, $x^3 + xyz + xy^2 + z^3$ *é um polinômio homogêneo de grau* 3.

Matriz de Lyapunov polinomial

- Usando o resultado de existência apresentado no Teorema 2, a estabilidade robusta do sistema (1) com $\Omega_N = \Delta_N$ (sistemas politópicos) pode ser caracterizada pelo seguinte teorema.

Teorema 3

O sistema (1) *com* $\alpha \in \Delta_N$ *é (Hurwitz) assintoticamente estável se e somente se existir uma matriz polinomial homogênea simétrica* $P_g(\alpha)$ *de grau suficientemente grande* g *tal que as seguinte desigualdades polinomiais*

$$P_g(\alpha) > 0, \qquad A(\alpha)' P_g(\alpha) + P_g(\alpha) A(\alpha) < 0$$

são verificadas para todo $\alpha \in \Delta_N$*.*

- Para um dado grau g, o teste de factibilidade do Teorema 3 equivale ao teste da positividade de polinômios matriciais.

Problema

Como testar a positividade de polinômios matriciais com parâmetros no simplex sem conservadorismo?

Teorema de Pólya

- O teorema apresentado a seguir estabelece uma propriedade importante dos polinômios homogêneos com variáveis no simplex unitário Δ_N.

Teorema 4 (Pólya)

Seja $f(\alpha) \triangleq f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N)$ um polinômio homogêneo escalar que é positivo $\forall \alpha \in \Delta_N$. Então para um d suficientemente grande, o polinômio resultante do produto

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_N)^d f(\alpha)$$

tem todos os coeficientes estritamente positivos.

- O resultado do Teorema de Pólya fornece uma maneira sistemática para se testar a positividade de um polinômio homogêneo com parâmetros no simplex.

Comentários sobre o Teorema de Pólya

Comentários

- De maneira prática, o Teorema de Pólya garante que a técnica de se testar a positividade de uma soma de monômios impondo que cada monômio seja positivo não é apenas suficiente, mas também necessária para um certo d.
- O procedimento é de natureza "semi-decidível". Sempre que o polinômio for positivo, o algoritmo convergirá em um número finito de passos (d grande o suficiente).
- A princípio o valor de d não é conhecido.
- O aumento de d gera um crescimento combinatorial do número de monômios do polinômio.
- Existem resultados na literatura que fornecem limitantes superiores para o valor de d. Entretanto, esses resultados envolvem o conhecimento do mínimo global do polinômio original $f(\alpha)$ (problema *NP*-hard já para polinômios homogêneos de grau maior ou igual a dois).

Teorema de Pólya: Exemplo

Considere o seguinte polinômio homogêneo em Δ_N

$$f(\alpha_1,\alpha_2) = \alpha_1^2 - (2-\delta)\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2$$

No ponto de mínimo global, $f^*(\alpha) = \frac{\delta}{4}$.

$\delta = 1$

Para $\delta = 1$, $f(\alpha) = \alpha_1^2 - \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2$. Aplicando uma relaxação de Pólya, tem-se

$$(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_1^2 - \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2) = \alpha_1^3 + \alpha_2^3$$

que já apresenta todos os coeficientes positivos.

- Para $\delta = 1$, o valor da função no ponto de mínimo global é $\frac{1}{4}$. Nesse caso, o algoritmo apresentou convergência com apenas uma iteração.

Teorema de Pólya: Exemplo

$\delta = \frac{1}{2}$

Para $\delta = \frac{1}{2}$, $f(\alpha) = \alpha_1^2 - \frac{3}{2}\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2$. Aplicando as relaxações de Pólya, tem-se

$$
\begin{aligned}
(\alpha_1+\alpha_2)^1 f(\alpha) =& \alpha_1^3 - \frac{1}{2}\alpha_1^2\alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_1\alpha_2{}^2 + \alpha_2{}^3 \\
(\alpha_1+\alpha_2)^2 f(\alpha) =& \alpha_1^4 + \frac{1}{2}\alpha_1^3\alpha_2 - \alpha_1^2\alpha_2{}^2 + \frac{1}{2}\alpha_1\alpha_2{}^3 + \alpha_2{}^4 \\
(\alpha_1+\alpha_2)^3 f(\alpha) =& \alpha_1^5 + \frac{3}{2}\alpha_1^4\alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_1^3\alpha_2{}^2 - \frac{1}{2}\alpha_1^2\alpha_2{}^3 + \frac{3}{2}\alpha_1\alpha_2{}^4 + \alpha_2{}^5 \\
(\alpha_1+\alpha_2)^4 f(\alpha) =& \alpha_1^6 + \frac{5}{2}\alpha_1^5\alpha_2 + \alpha_1^4\alpha_2{}^2 - \alpha_1^3\alpha_2{}^3 + \alpha_1^2\alpha_2{}^4 + \frac{5}{2}\alpha_1\alpha_2{}^5 + \alpha_2{}^6 \\
(\alpha_1+\alpha_2)^5 f(\alpha) =& \alpha_1^7 \mathbf{+} \frac{7}{2}\alpha_1^6\alpha_2 \mathbf{+} \frac{7}{2}\alpha_1^5\alpha_2{}^2 \mathbf{+} \frac{7}{2}\alpha_1^2\alpha_2{}^5 \mathbf{+} \frac{7}{2}\alpha_1\alpha_2{}^6 \mathbf{+} \alpha_2{}^7
\end{aligned}
$$

- O algoritmo apresentou convergência na quinta relaxação.

- Quanto mais próximo do zero o mínimo global do polinômio estiver, maior será o *d* necessário para gerar o polinômio com todos os coeficientes positivos. Veja (Powers & Reznick, JPAA, 2001) para mais detalhes.

Pólya e Teoria de Controle

Comentários

- Assim como a análise de estabilidade robusta de sistemas lineares politópicos, muitos outros problemas de controle envolvendo incertezas politópicas podem ser colocados na forma de análise da positividade de polinômios matriciais, com ou sem minimização de uma função objetivo.
- O Teorema de Pólya pode ser imediatamente adaptado para o caso matricial (C. W. Scherer, SIMAX, 2005).
- Condições enunciadas em termos de relaxações convergentes com boa eficiência computacional.

- Considere o sistema politópico (1) com $N = 2$, i.e. $A(\alpha) = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2$. Usando uma matriz de Lyapunov de grau $g = 1$, i.e. $P_1(\alpha) = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2$, temos as seguintes desigualdades matriciais para analisar a positividade.

Positividade de polinômios matriciais: Exemplo

- Ou seja, existem P_1 e P_2 tais que as seguintes desigualdades são verificadas?

$$\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 > 0,$$
$$\alpha_1^2(A_1' P_1 + P_1 A_1) + \alpha_1\alpha_2(A_1' P_2 + P_2 A_1 + A_2' P_1 + P_1 A_2) + \alpha_2^2(A_2' P_2 + P_2 A_2) < 0$$

- Para a primeira desigualdade, é necessário e suficiente impor que $P_1 > 0$, $P_2 > 0$. Para a segunda desigualdade, temos a seguinte condição suficiente:

$$\underbrace{A_1' P_1 + P_1 A_1}_{T_1} < 0, \quad \underbrace{A_1' P_2 + P_2 A_1 + A_2' P_1 + P_1 A_2}_{T_{12}} < 0, \quad \underbrace{A_2' P_2 + P_2 A_2}_{T2} < 0$$

- De fato, apesar das condições $T_1 < 0$ e $T_2 < 0$ serem condições necessárias, $T_{12} < 0$ é apenas suficiente.

- Para reduzir o conservadorismo, relaxações de Pólya podem ser aplicadas, i.e.

$$(\alpha_1 + \alpha_2)^d \left(\alpha_1^2 T_1 + \alpha_1\alpha_2 T_{12} + \alpha_2^2 T_2\right) < 0$$

Positividade de polinômios matriciais: Exemplo

- Fixando o valor de d e expandindo o produto, temos as seguintes LMIs (impondo que cada coeficiente seja negativo):

d=1

$$T_1 < 0, \quad T_1 + T_{12} < 0, \quad T_2 + T_{12} < 0, \quad T_2 < 0$$

d=2

$$T_1 < 0, \quad 2T_1 + T_{12} < 0, \quad T_1 + T_2 + 2T_{12} < 0, \quad 2T_2 + T_{12} < 0, \quad T_2 < 0$$

d=3

$$T_1 < 0, \quad 3T_1 + T_{12} < 0, \quad 3T_1 + T_2 + 3T_{12} < 0,$$
$$T_1 + 3T_2 + 3T_{12} < 0, \quad 3T_2 + T_{12} < 0, \quad T_2 < 0$$

- Se as LMIs são verificadas para um dado $d = \hat{d}$, então as LMIs geradas com $d = \hat{d} + 1$ também serão verificadas, pois são combinações positivas das LMIs geradas com $d = \hat{d}$.

Comentários

Comentários

- No exemplo anterior, as relaxações de Pólya foram aplicadas para testar a positividade de um polinômio homogêneo de grau dois. Entretanto, não há limitação quanto ao grau do polinômio original.
- Note que o emprego das relaxações de Pólya, por exemplo, no contexto de análise robusta de politopos, é bastante particular, no sentido que de que o polinômio a ser testado possui coeficientes que estão sendo "procurados". Implicação imediata: não é possível estimar limitantes para d.
- O crescimento de d somente aumenta o número de restrições (LMIs). O número de variáveis é mantido constante.
- A adaptação do Teorema de Pólya para o caso matricial é imediata, bastando trabalhar com o polinômio "escalarizado" $f(\alpha) = v'F(\alpha)v$, com $v'v = 1$.

Exemplo

Considere o sistema politópico discreto

$$x(k+1) = A(\alpha)x(k), \quad A(\alpha) = \alpha_1 \begin{bmatrix} 0.4041 & 1.4504 \\ 0.0368 & 0.4325 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -0.1177 & -0.2375 \\ 1.7534 & -0.0484 \end{bmatrix}$$

O objetivo é investigar a estabilidade desse sistema por meio da função de Lyapunov $v(x) = x'(\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2)x$. Desse modo, a existência do polinômio homogêneo $P(\alpha) = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2$ será testada por meio do seguinte problema de otimização baseado em desigualdades matriciais polinomiais.

$$\text{Encontre } P_1 \text{ e } P_2 \text{ tais que}$$
$$\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 > 0$$
$$(\alpha_1 + \alpha_2)^d \left(A(\alpha)' P(\alpha) A(\alpha) - P(\alpha)\right) < 0$$

Para o primeiro polinômio, basta impor $P_1 > 0$ e $P_2 > 0$. Para cada valor fixo de d, o segundo polinômio (grau $d+3$) é expandido e cada coeficiente (matricial) acrescenta uma restrição LMI. Uma solução factível foi encontrada somente para $d = 6$.

$$P(\alpha) = \alpha_1 \begin{bmatrix} 0.7523 & -0.7189 \\ -0.7189 & 2.9316 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 2.4793 & -0.1631 \\ -0.1631 & 0.2065 \end{bmatrix}$$

Exemplo: continuação

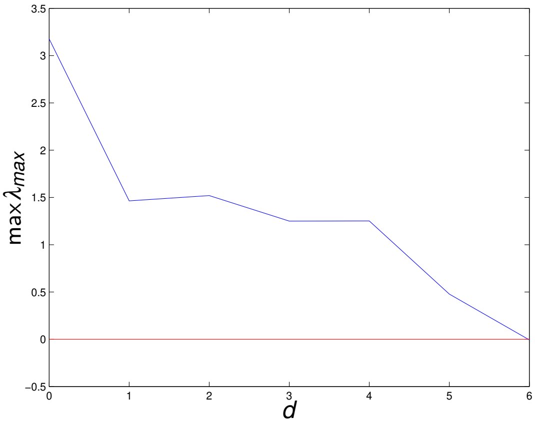
- Evolução dos máximos valores das LMIs para $d = 0, \dots, 6$.

d	maximum eigenvalues									
0	-0.024	3.175	0.718	-0.006						
1	-0.024	1.464	0.605	0.378	-0.006					
2	-0.024	-0.195	1.519	0.191	0.164	-0.006				
3	-0.024	-1.737	1.250	0.643	0.222	0.020	-0.006			
4	-0.024	-3.008	-0.491	1.252	0.111	0.228	-0.083	-0.006		
5	-0.024	-3.814	-3.692	0.479	0.277	-0.066	0.144	-0.161	-0.006	
6	-0.024	-4.219	-8.241	-3.281	-0.242	-0.910	-0.114	-0.029	-0.223	-0.006

- Caso não existam P_1 e P_2 assegurando a estabilidade do sistema, o crescimento de d não tornará todos os coeficientes negativos. De fato, de acordo com o Teorema 3, matrizes de Lyapunov de graus maiores em α ($g > 1$) podem ser necessárias.

Exemplo: continuação

- Maior dos λ_{max} de cada conjunto de LMIs (para cada d) como função de $d = 0, \ldots, 6$.



- Não há garantias que o maior dos λ_{max} das LMIs decrescerá monotonicamente à medida que d cresce.

Procedimento convergente

- Usando as relaxações de Pólya, é possível construir um procedimento sistemático e convergente para analisar a estabilidade robusta do sistema politópico (1) por meio de uma seqüência de LMIs (relaxações), parametrizadas no grau g da matriz de Lyapunov e no nível d de relaxações de Pólya.

Teorema 5

O sistema (1) *com* $\alpha \in \Delta_N$ *é (Hurwitz) assintoticamente estável se e somente se existir uma matriz polinomial homogênea simétrica* $P_g(\alpha)$*, um grau* g *e um* d *suficientemente grande tais que as seguinte desigualdades polinomiais*

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_N)^d P_g(\alpha) > 0,$$

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_N)^d \left(A(\alpha)' P_g(\alpha) + P_g(\alpha) A(\alpha) \right) < 0$$

são verificadas para todo $\alpha \in \Delta_N$*.*

Notação para a matriz de Lyapunov $P_g(\alpha)$

- Para matrizes de Lyapunov dependendo de maneira afim de α, foi usada a seguinte notação

$$P(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i P_i$$

Para o caso de dependência genérica de grau g em α, tal notação não é mais adequada. Uma idéia é indexar as variáveis P com os índices de seus respectivos monômios. Exemplos:

$$N=2, g=3 : P_3(\alpha) = \alpha_1^3 P_{30} + \alpha_1^2 \alpha_2 P_{21} + \alpha_1 \alpha_2^2 P_{12} + \alpha_2^3 P_{03}$$

$$N=3, g=2 : P_2(\alpha) = \alpha_1^2 P_{200} + \alpha_2^2 P_{020} + \alpha_3^2 P_{002} + \alpha_1 \alpha_2 P_{110} + \alpha_1 \alpha_3 P_{101} + \alpha_2 \alpha_3 P_{011}$$

$$N=4, g=1 : P_1(\alpha) = \alpha_1 P_{1000} + \alpha_2 P_{0100} + \alpha_3 P_{0001} + \alpha_4 P_{0001}$$

Polinômios Homogêneos & Manipulações

- Seja a seguinte matriz polinomial homogênea

$$P_4(\alpha) = \alpha_1^4 P_{40} + \alpha_1^3 \alpha_2 P_{31} + \alpha_1^2 \alpha_2^2 P_{22} + \alpha_1 \alpha_2^3 P_{13} + \alpha_2^4 P_{04}$$

- Note que toda a informação necessária para construir essa matriz polinomial sistematicamente está nas potências dos monômios. Ou seja, se definirmos que os expoentes de cada monômio formam uma N-upla, o seguinte conjunto de N-uplas pode ser usado nas manipulações algébricas

$$\mathscr{K}(g,N) = \mathscr{K}(4,2) = \{40, 31, 22, 13, 04\}$$

- Note que as N-uplas do conjunto $\mathscr{K}(g,N)$ são todas as possíveis soluções da equação

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_N = g, \qquad k_1 k_2 \cdots k_N \in \mathscr{K}(g,N)$$

- Com essas notações é possível construir as LMIs sistematicamente a partir dos vértices do politopo A_i, $i = 1, \ldots, N$, grau de matriz de Lyapunov g e número de relaxações de Pólya d.

Existência de $P_g(\alpha)$

- Suponha que exista o interesse em testar a estabilidade do sistema (1) por meio de uma matriz de Lyapunov polinomial homogênea de grau $\hat{g}$. Nesse caso, basta testar as condições do Teorema 5 para $g = \hat{g}$ e d crescente.

- Esse é o caso quando têm-se informações sobre limitantes para o grau da matriz de Lyapunov polinomial homogênea. No caso da estabilidade robusta de sistemas politópicos contínuos no tempo, um limitante superior para o grau de matriz de Lyapunov é $g \leq \frac{n(n+1)}{2} - 1$ (Chesi et al., IEEE-TAC, 2005).

- Para outras LMIs robustas em que não tem-se informação sobre limitantes superiores para o grau da matriz de Lyapunov, uma estratégia prática é fazer $g = d = r$ e aumentar r.

Questão

O que acontece se fixarmos $d = 0$ e aumentarmos somente g?

Propriedade importante de convergência

- Suponha que exista uma matriz de Lyapunov polinomial homogênea de grau $\bar{g}$ garantindo a estabilidade robusta do sistema (1). Nesse caso as condições do Teorema 5 apresentarão convergência para $g = \bar{g}$ e um d *suficientemente grande*.

- O teorema a seguir apresenta uma maneira alternativa para verificar a estabilidade robusta do sistema (1).

Teorema 6

O sistema (1) *com* $\alpha \in \Delta_N$ *é (Hurwitz) assintoticamente estável se e somente se existir uma matriz polinomial homogênea simétrica* $P_g(\alpha)$ *e um grau* g *suficientemente grande tais que as seguinte desigualdades polinomiais*

$$P_g(\alpha) > 0,$$
$$A(\alpha)'P_g(\alpha) + P_g(\alpha)A(\alpha) < 0$$

são verificadas para todo $\alpha \in \Delta_N$.

Idéia da prova

- Hipótese: existe uma matriz de Lyapunov polinomial homogênea de grau $\bar{g}$ garantindo a estabilidade robusta. Nesse caso, as condições do Teorema 5 podem falhar para $g = \bar{g}$ e $d = 0$, pois um d suficientemente grande é necessário. Entretanto, sabe-se, do Teorema de Pólya, que os polinômios homogêneos

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_N)^r P_g(\alpha) > 0,$$
$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_N)^f \left(A(\alpha)' P_g(\alpha) + P_g(\alpha) A(\alpha)\right) < 0$$

apresentarão coeficientes positivos (negativos) para r e f suficientemente grandes. Assim, as condições do Teorema 6 apresentarão convergência para $g = \bar{g} + \max(f, r)$.

Propriedade importante

Para um valor fixo de d, basta aumentar g para garantir a convergência das relaxações.

Exemplo

- Considere o seguinte sistema politópico discreto no tempo

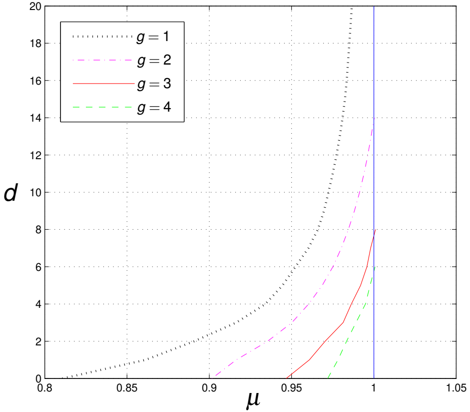
$$x(k+1) = A(\alpha)x(k), \quad A(\alpha) = \mu\left(\alpha_1 \begin{bmatrix} -0.05 & 0.97 \\ -1.00 & 0.01 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -1.68 & -1.44 \\ 0.94 & 0.22 \end{bmatrix}\right)$$

- As relaxações LMIs para usadas para investigar a estabilidade desse sistema serão obtidas a partir das seguintes desigualdades polinomiais

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_N)^d P_g(\alpha) > 0,$$
$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_N)^d \begin{bmatrix} P_g(\alpha) & A(\alpha)' P_g(\alpha) \\ \star & P_g(\alpha) \end{bmatrix} > 0.$$

- O objetivo é fazer um estudo do valor de d necessário para garantir a estabilidade robusta em função de μ para $g = 1, \ldots, 4$.

Exemplo: continuação



- Valores de d necessários para garantir a estabilidade robusta em função de μ para $g = 1, \ldots, 4$. Em princípio, a estabilidade robusta não pode ser garantida com $g = 1$.

Exemplo: complexidade numérica

- A tabela abaixo mostra a complexidade numérica associada a cada par (g,d) para avaliar a estabilidade robusta do sistema em estudo usando-se $\mu = 1$. V é o número de variáveis escalares; L é o número de linhas de LMIs. O tempo computacional é dado em segundos.

(g,d)	V	L	Tempo (s)
(2,14)	9	72	0.22
(3,8)	12	52	0.14
(4,6)	15	48	0.13
(5,3)	18	40	0.11
(6,1)	21	36	0.10
(7,0)	24	36	0.09

Reduzindo o valor de d

- A grosso modo, o valor de d necessário para garantir a convergência, por exemplo, do problema de estabilidade robusta, está diretamente ligado à quão "longe" o polinômio original está de seu polinômio equivalente com todos os coeficientes positivos.

- Caso o polinômio original possa ser representado por outro polinômio com as mesmas propriedades, mas que possua uma distância menor para o seu polinômio equivalente positivo, a convergência pode ser melhorada (menores valores de d).

Exemplo: As desigualdades polinomiais

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_N)^{d_1} \begin{bmatrix} P_g(\alpha) & A(\alpha)' P_g(\alpha) \\ \star & P_g(\alpha) \end{bmatrix} > 0, \tag{3}$$

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_N)^{d_2} \begin{bmatrix} P_g(\alpha) & A(\alpha)' G_g(\alpha)' \\ \star & G_g(\alpha) + G_g(\alpha)' - P_g(\alpha) \end{bmatrix} > 0 \tag{4}$$

são totalmente equivalentes para caracterizar a existência da matriz de Lyapunov $P_g(\alpha)$ (estabilidade robusta Schur da matriz $A(\alpha)$). Entretanto, sempre $d_2 \leq d_1$.

Exemplo

- No sistema politópico usado no exemplo anterior, a desigualdade (3) precisa de $d = 14$ para garantir a estabilidade robusta usando uma matriz polinomial homogênea de grau $g = 2$. Nesse caso,

$$\begin{bmatrix} P_{02} & \vdots & P_{11} & \vdots & P_{20} \end{bmatrix} = 10^{-3} \left[\begin{array}{cc:cc:cc} 0.1388 & 0.1401 & 0.3382 & 0.1817 & 0.1505 & -0.0058 \\ 0.1401 & 0.2128 & 0.1817 & 0.1085 & -0.0058 & 0.1484 \end{array}\right] \tag{5}$$

- Por outro lado, usando a desigualdade (4), $d = 7$ é suficiente para garantir a estabilidade robusta, com

$$\begin{bmatrix} P_{02} & \vdots & P_{11} & \vdots & P_{20} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc:cc:cc} 0.0227 & 0.0232 & 0.0203 & 0.0021 & 0.0062 & -0.0002 \\ 0.0232 & 0.0352 & 0.0021 & 0.0051 & -0.0002 & 0.0062 \end{array}\right] \tag{6}$$

Fatos importantes

A solução (5) é uma solução para (4) para $d_2 = d_1$. Por outro lado, a solução (6) não é uma solução para (3) para $d_1 = d_2$. Nesse caso, somente com $d_1 = 29$ o polinômio resultante apresentou todos os coeficientes positivos.

Exemplo: continuação

- Outra desigualdade que também pode caracterizar completamente a existência de uma matriz de Lyapunov $P_g(\alpha)$ no contexto de estabilidade robusta de sistemas politópicos discretos no tempo é

$$(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_N)^{d_3}\begin{bmatrix} -P_g(\alpha)+F_g(\alpha)A(\alpha)+A(\alpha)'F_g(\alpha)' & -F_g(\alpha)+A(\alpha)'G_g(\alpha)' \\ \star & P_g(\alpha)-G_g(\alpha)-G_g(\alpha)' \end{bmatrix} < 0 \quad (7)$$

- Nesse caso, a desigualdade $(\alpha_1+\cdots+\alpha_N)^{d_3}P_g(\alpha) > 0$ também é necessária.

- Uma solução $P_2(\alpha)$ para o exemplo anterior foi encontrada com $d_3 = 0$, fornecendo

$$\left[\begin{array}{c:c:c} P_{02} & P_{11} & P_{20} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc:cc:cc} 1.2820 & 1.2957 & 0.7409 & 0.2410 & 0.9012 & -0.0268 \\ 1.2957 & 1.9641 & 0.2410 & 0.6374 & -0.0268 & 0.8752 \end{array}\right]$$

Exemplo: complexidades

- Complexidade numérica associada às condições de estabilidade robusta de sistemas politópicos discretos tempo tempo, dadas pelas equações (3), (4) e (7), na avaliação do sistema incerto dado no exemplo anterior. V é o número de variáveis escalares; L é o número de linhas de LMIs;

Método	(g,d)	V	L	Tempo (s)
Eq. (3)	$(2,14)$	9	72	0.21
Eq. (4)	$(2,7)$	21	44	0.14
Eq. (7)	$(2,0)$	33	22	0.08

- À medida que variáveis de folga são introduzidas no problema, menores valores de d são necessários para garantir a estabilidade robusta.

- Vantagem: diminui o valor de d para atingir a convergência. Desvantagem: aumenta o número de variáveis no problema, tornando rapidamente proibitivo o seu uso em sistemas de dimensões (n,N) maiores.

Conclusões

Generalidade

- A metodologia apresentada no Teorema 5 é bem geral, podendo ser aplicada em qualquer LMI robusta com parâmetros no simplex.
- Exemplos: cômputo das normas $\mathscr{H}_\infty$ e $\mathscr{H}_2$ de sistemas politópicos.
- Em geral, a idéia se aplica a quaisquer requisitos de análise, controle e filtragem de sistemas lineares incertos envolvendo incertezas politópicas.

Aumento de $g \times d$

- Os números V (variáveis) e L (linhas de LMIs) crescem combinatorialmente à medida que g e d aumentam (d afeta apenas L).
- Uma boa estratégia para uso prático é fixar $g = d = r$ e crescer r. A exceção é quando tem-se informações sobre um limitante superior para g.
- Exemplo: estabilidade robusta de sistemas politópicos.
- Para sistemas de pequenas dimensões ($n \leq 4$, $N \leq 4$), uma boa estratégia também pode ser considerar $d = 0$ e crescer g (convergência garantida).

Conclusões Finais

Programação

- Basicamente, a programação das condições baseia-se no tratamento dos produtos de polinômios homogêneos matriciais, sendo sempre entre um polinômio de grau genérico g a determinar e as matrizes do sistema.
- Exemplo: uma vez desenvolvida a lógica para tratar as seguintes desigualdades polinomiais:

$$(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_N)^d\left(A(\alpha)'P_g(\alpha)+P_g(\alpha)A(\alpha)\right)<0,$$
$$(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_N)^d\left(A(\alpha)'P_g(\alpha)A(\alpha)-P_g(\alpha)\right)<0$$

  a grande maioria dos problemas de análise e controle envolvendo sistemas politópicos podem ser programados de maneira imediata, com apenas pequenos ajustes.
- ROLMIP (Robust LMI Parser): *toolbox* para Matlab que facilita a programação de LMIs robustas com variáveis polinomiais. `rolmip.github.io`

Conclusões Finais

Variáveis de folga (“slack variables”)

- Em geral, o seu uso limita-se a sistemas de pequena dimensão ($n \leq 4$, $N \leq 4$).
- Para sistemas de dimensões maiores, o esforço computacional torna-se rapidamente proibitivo à medida que g e d crescem.
- Destaca-se o bom desempenho das condições com variáveis de folga em problemas envolvendo a minimização de uma função objetivo.
- Exemplo: cômputo das normas $\mathscr{H}_2$ e $\mathscr{H}_\infty$.
- Outra idéia interessante é usar as variáveis de folga com graus maiores do que a própria matriz de Lyapunov, melhorando a convergência em termos de d.