IA892 – Análise e Controle de Sistemas Lineares por Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs)

Aula 1: Complemento de Schur, Transformações de Congruência, LMIs e Estabilidade

Pedro L. D. Peres & Ricardo C. L. F. Oliveira

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas

1^o Semestre 2024

Tópicos

Funcionais afins

Um funcional $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ é afim se,

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) = \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{X},\ \alpha \in \mathbb{R}$$

- Seja $f : \mathbb{X} \to \mathbb{S}^n$ um funcional afim, sendo $\mathbb{S}^n$ o conjunto das matrizes simétricas de dimensão $n \times n$. Os conjuntos

$$\{x \ : \ f(x) \geq 0\} \ ; \ \{x \ : \ f(x) > 0\} \ ; \ \{x \ : \ f(x) \leq 0\} \ ; \ \{x \ : \ f(x) < 0\}$$

são convexos.

- Seja $f : \mathbb{X} \to \mathbb{S}^n$ um funcional afim. As desigualdades $f(x) \geq 0$, $f(x) \leq 0$, $f(x) > 0$ e $f(x) < 0$ são desigualdades matriciais lineares, ou *Linear Matrix Inequalities — LMIs*

- **Exemplos:** para A e $Q = Q'$ dadas,

$$f(X) = A'X + XA + Q \leq 0 \ ; \ f(X) = A'XA - X + Q < 0 \ ; \ f(X) = \begin{bmatrix} X & A'X \\ XA & X \end{bmatrix} > 0$$

Desigualdades Matriciais Lineares — LMIs

- Convexidade

- Existem programas computacionais especializados (algoritmos convergem em tempo polinomial) na resolução de LMIs: LMI Control Toolbox (Matlab), Lmitool (Matlab e Scilab), SeDuMi, LMI Solver, Mosek

- Inúmeros problemas de análise, filtragem e controle de sistemas dinâmicos podem ser formulados como LMIs

- Outras aplicações (mecânica, otimização, etc.)

- Formular um problema em termos de LMIs equivale a resolver o problema!

- Lyapunov, 1890. A equação diferencial $\dot{x} = Ax$ é estável (trajetórias iniciando em qualquer ponto convergem para $x = 0$) se e somente se existir $P = P'$ tal que

$$P > 0 \quad ; \quad A'P + PA < 0$$

Desigualdades Matriciais Lineares — LMIs

- Empilhando as variáveis de decisão (incógnitas) em um único vetor $x \in \mathbb{R}^m$, pode-se re-escrever uma LMI na forma

$$F(x) \triangleq F_0 + x_1 F_1 + \cdots + x_m F_m > 0$$

com $F_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 0, \ldots, m$ matrizes constantes simétricas. Note que $F(x) > 0$ significa que $F(x)$ deve ser definida positiva para todo x, ou seja, $y' F(x) y > 0$ para todo vetor $y \neq 0$.

- A LMI $F(x) > 0$ é equivalente a um conjunto de n desigualdades polinomiais em x, obtidas impondo-se que os menores principais líderes de $F(x)$ devem ser todos positivos.

- Como visto anteriormente, a LMI $F(x) > 0$ define um conjunto convexo.

Desigualdades Matriciais Lineares — **LMIs** I

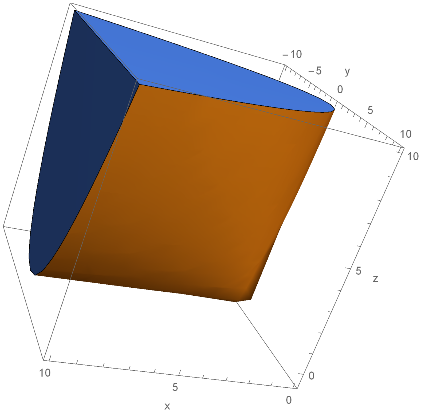
- Exemplo

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{F_1} x_1 + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{F_2} x_2 + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{F_3} x_3 > 0$$

$$A'X + XA = (A'F_1 + F_1A)x_1 + (A'F_2 + F_2A)x_2 + (A'F_3 + F_3A)x_3 < 0$$

- Note que $X > 0$ equivale às restrições $x_1 > 0$, $x_3 > 0$ e $x_1x_3 > x_2^2$ (não-linear!). A seguir é mostrada a região factível definida pela interseção dessas restrições. Note que a região em azul indica um corte imposto pelo desenho (é ilimitada nessas direções).

Desigualdades Matriciais Lineares — **LMIs** II



Desigualdades Matriciais Lineares — **LMIs** III

- $X > 0$ pode também ser expressa como um número infinito de restrições lineares do tipo $a_i' x \leq b_i$, pois $X > 0 \Leftrightarrow z' X z > 0, \ \forall z \in \mathbb{R}^n$. Escolhendo por exemplo

$$z_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \ ; \ z_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \ ; \ z_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e impondo $z_i' X z_i > 0$, chegam-se respectivamente às restrições

$$x_1 > 0 \quad ; \quad x_3 > 0 \quad ; \quad x_1 + 2x_2 + x_3 > 0$$

Exemplo: tetraedro "suavizado" I

Seja

$$F(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ x & 1 & z \\ y & z & 1 \end{bmatrix} \geq 0$$

Computando os menores principais líderes de $F(x)$, tem-se

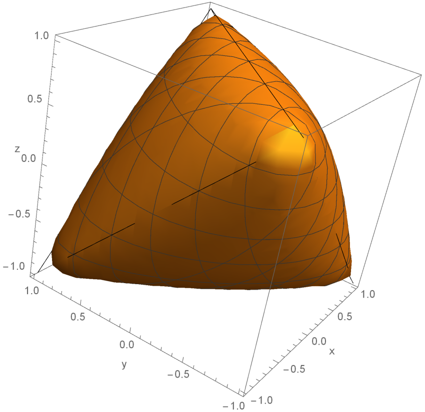
$$1 \geq 0, \quad 1 - x^2 \geq 0, \quad 2xyz - y^2 - z^2 - x^2 + 1 \geq 0$$

Usando o comando no *software* Mathematica,

```
RegionPlot3D[And @@ {1 >= 0, 1 - x^2 >= 0,
2*x*y*z - y^2 - z^2 - x^2 + 1 >= 0}, {x, -1, 1},
{y, -1, 1}, {z, -1, 1}, AxesLabel -> {"x", "y", "z"}]]
```

tem-se a seguinte região factível mostrada a seguir.

Exemplo: tetraedro “suavizado” II



Transformação de Congruência

$$Q = T'RT \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad , \quad T \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ não singular}$$

- Duas matrizes simétricas $Q, R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ são congruentes se existir $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ não singular tal que $Q = T'RT$. Se Q e R são congruentes, então $Q > 0$ se e somente se $R > 0$.

Prova: $R > 0 \Rightarrow \forall x \neq 0,\ x'Rx > 0$. Definindo $y = T^{-1}x$, tem-se $x'Rx = y'T'RTy = y'Qy > 0,\ \forall y \neq 0 \Rightarrow Q > 0$.

- Note que para $R = R' \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $T \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $T'RT \in \mathbb{R}^{m\times m}$. Neste caso,

$$R > 0 \quad \Rightarrow \quad T'RT \geq 0 \quad , \quad R > 0 \ \text{ e } \ \text{rank}(T) = m \quad \Rightarrow \quad T'RT > 0$$

pois $\text{rank}(T'RT) = \text{rank}(T)$ e, se $\text{rank}(T) = m$, não existe $x \neq 0$ tal que $Tx = 0$

- Note que para $R = R' \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $T \in \mathbb{R}^{n\times m}$

$$T'RT > 0 \quad \not\Rightarrow \quad R > 0 \ ! \qquad \text{Por exemplo, } \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 > 0$$

Complemento de Schur

- Considere a matriz quadrada simétrica X particionada

$$X = \begin{bmatrix} A & B \\ B' & C \end{bmatrix}$$

com $A = A'$ e $C = C'$. Se $\det(A) \neq 0$, a matriz $C - B'A^{-1}B$ é o complemento de Schur de X em relação a A.

Note por exemplo que

$$X = \begin{bmatrix} A & B \\ B' & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ B'A^{-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C - B'A^{-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & A^{-1}B \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

e portanto $\det(X) = \det(A)\det(C - B'A^{-1}B)$.

Analogamente, se $\det(C) \neq 0$, $A - BC^{-1}B'$ é o complemento de Schur de X em relação a C e

$$X = \begin{bmatrix} A & B \\ B' & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & BC^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A - BC^{-1}B' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ C^{-1}B' & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

Caracterização da positividade de X

- Considere a matriz quadrada simétrica X particionada

$$X = \begin{bmatrix} A & B \\ B' & C \end{bmatrix}$$

- $X > 0$ se e somente se $A > 0$ e $C - B'A^{-1}B > 0$
- $X > 0$ se e somente se $C > 0$ e $A - BC^{-1}B' > 0$
- Se $A > 0$, $X \geq 0$ se e somente se $C - B'A^{-1}B \geq 0$
- Se $C > 0$, $X \geq 0$ se e somente se $A - BC^{-1}B' \geq 0$

Complemento de Schur

$$X = \begin{bmatrix} A & B \\ B' & C \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ B'A^{-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix}}_{T'} \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C - B'A^{-1}B \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} & A^{-1}B \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}}_{T}$$

- Como T é uma matriz não singular:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B' & C \end{bmatrix} > 0 \iff \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C - B'A^{-1}B \end{bmatrix} > 0$$

- Analogamente,

$$X = \begin{bmatrix} A & B \\ B' & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & BC^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A - BC^{-1}B' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ C^{-1}B' & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B' & C \end{bmatrix} > 0 \iff \begin{bmatrix} A - BC^{-1}B' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C \end{bmatrix} > 0$$

Complemento de Schur e LMIs

- Desigualdades convexas podem ser convertidas em LMIs por meio do complemento de Schur.

$$\begin{bmatrix} Q(X) & S(X) \\ S(X)' & R(X) \end{bmatrix} > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad R(X) > 0 \;\; , \;\; Q(X) - S(X)R(X)^{-1}S(X)' > 0$$

- **Exemplo:** A restrição sobre a norma da matriz $\|M(X)\| < 1$ (máximo valor singular), com $M(X) \in \mathbb{R}^{p\times q}$ dependendo de maneira afim em X, pode ser escrita como a LMI

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_p & M(X) \\ M(X)' & \mathbf{I}_q \end{bmatrix} > 0$$

pois $\|M\| < 1$ equivale a $\mathbf{I}_p - MM' > 0$. O caso $q = 1$ reduz-se a uma desigualdade quadrática convencional em x.

- **Exemplo:** A restrição $c(X)'P(X)^{-1}c(X) < 1$, $P(X) > 0$, com $c(X) \in \mathbb{R}^n$ e $P(X) = P(X)' \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dependendo de maneira afim em X, pode ser expressa em termos da LMI

$$\begin{bmatrix} P(X) & c(X) \\ c(X)' & 1 \end{bmatrix} > 0$$

Definições de estabilidade

O sistema linear contínuo no tempo descrito por $\dot{x} = Ax$, com $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, é assintoticamente estável se qualquer uma das condições abaixo for verificada:

- $\lim\limits_{t \to \infty} x(t) \to 0$, para condição inicial $x(0)$ arbitrária
- $\max\limits_{i} \ \mathrm{Re}\{\lambda_i(A)\} < 0, \ i = 1, \ldots, n$

- A estabilidade de $\dot{x} = Ax$ (ou simplesmente a estabilidade de A) pode ser também investigada por meio de uma função de Lyapunov $v(x)$. Para que o sistema seja assintoticamente estável, duas condições devem ser verificadas:

- $v(x) > 0 \ \forall x \neq 0$
- $\dot{v}(x) < 0 \ \forall x \neq 0 \quad$ solução de $\dot{x} = Ax$

Teorema de Lyapunov

- Escolhendo como candidata à função de Lyapunov uma função quadrática $v(x) = x'Px$, com $P = P'$ a determinar, tem-se

  - $v(x) = x'Px > 0, \ \forall \ x \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad P > 0$

  - $\dot{v}(x) = \dot{x}'Px + x'P\dot{x} = x'(A'P + PA)x < 0 \quad \Leftrightarrow \quad A'P + PA < 0$

- Portanto, para determinar se A é estável, basta procurar uma solução factível $P = P' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ para o problema (LMIs):

$$P > 0 \ \ ; \ \ A'P + PA < 0$$

Teorema 1 (Lyapunov)

Os autovalores de A têm parte real negativa se e somente se para qualquer matriz simétrica definida positiva Q a equação de Lyapunov

$$A'P + PA = -Q$$

tiver uma única solução $P = P' > 0$

Sistema de equações

- Resolvendo a equação de Lyapunov $A'P + PA + Q = 0$
- Matlab: `[P]=lyap(A',Q)`

Ou: • Definindo o produto de Kronecker de duas matrizes $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{p\times q}$

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mp\times nq}$$

e a operação vec (A), $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, como

$$\text{vec } A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} & a_{12} & \cdots & a_{m2} & \cdots & a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}'$$

pode-se reescrever a equação de Lyapunov $A'P + PA = -Q$ como

$$\left[\mathbf{I}_n \otimes A' + A' \otimes \mathbf{I}_n\right] \text{vec } (P) = -\text{vec } (Q)$$

• sistema de equações lineares

• Como P e Q são simétricas, e também a equação de Lyapunov é simétrica, pode-se reduzir o sistema de n^2 equações lineares acima a $n(n+1)/2$ equações com $n(n+1)/2$ incógnitas.

Solução por LMIs

- Usando LMIs, programe

$$\min \ \mathbf{Tr}(P)$$
$$P > 0 \ \ ; \ \ A'P + PA + Q < 0$$

- A minimização do traço leva a solução P para a igualdade
- Solução $P = P' > 0$ existe sempre que A for estável;

Condições equivalentes

Existe $P = P' > 0$ tal que

$$A'P + PA < 0$$

se e somente se existir $W = W' > 0$ tal que

$$AW + WA' < 0$$

- Se P satisfaz a primeira LMI, então $W = P^{-1}$ satisfaz a segunda e vice-versa

$$W^{-1}(AW + WA')W^{-1} = A'W^{-1} + W^{-1}A$$

$$P^{-1}(A'P + PA)P^{-1} = AP^{-1} + P^{-1}A'$$

- Autovalores de A e A' são os mesmos
- A é estável se e somente se A' também o for

Homogeneidade

- Homogeneidade:

$$\exists P = P' > 0: \ A'P + PA < 0 \ \Leftrightarrow \ \exists P = P' > 0 : A'P + PA < -\rho\mathbf{I} \ , \forall \rho \geq 0$$

Prova: ($\Leftarrow$) É imediato perceber que se

$$A'P + PA + \rho\mathbf{I} < 0$$

com ρ não negativo, então $A'P + PA < 0$. ($\Rightarrow$) Seja $P_0 > 0$ a solução de $A'P_0 + P_0A < 0$. Tome

$$\lambda = \max_i(\text{real}(\lambda_i(A'P_0 + P_0A))) \quad \text{e } \lambda^+ = \lambda + \varepsilon$$

sendo ε um número suficientemente pequeno e positivo. Agora considere $A'P + PA < -\rho\mathbf{I}$. Multiplicando os dois lados da desigualdade por $-\lambda^+/\rho$, tem-se

$$A'\left(\frac{-\lambda^+}{\rho}P\right) + \left(\frac{-\lambda^+}{\rho}P\right)A < \lambda^+\mathbf{I}$$

Aplicando a mudança de variável $\hat{P} = \frac{-\lambda^+}{\rho}P$, tem-se $A'\hat{P} + \hat{P}A < \lambda^+\mathbf{I}$. Para concluir, note que $\hat{P} = P_0$ garante que

$$A'P_0 + P_0A \leq \lambda\mathbf{I} < \lambda^+\mathbf{I}$$

Estabilidade: caso discreto

O sistema linear discreto no tempo descrito por $x(k+1) = Ax(k)$, com $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é assintoticamente estável se qualquer uma das condições abaixo for verificada:

- $\lim_{k\to\infty} x(k) \to 0$, condição inicial $x(0)$ arbitrária
- $\max_i \; |\lambda_i(A)| < 1,\; i = 1,\ldots,n$

- A estabilidade de $x(k+1) = Ax(k)$ (ou simplesmente a estabilidade de A) pode ser também investigada por meio de uma função de Lyapunov $v(x)$. Para que o sistema seja assintoticamente estável, duas condições devem ser verificadas:

- $v(x) > 0 \; \forall x \neq 0$
- $v(x(k+1)) - v(x(k)) < 0 \; \forall x \neq 0$ solução de $x(k+1) = Ax(k)$

Teorema de Lyapunov

- Função de Lyapunov $v(x) = x'Px$
- $v(x) = x'Px > 0, \ \forall \ x \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad P > 0$
- $v(x(k+1)) - v(x(k)) = x(k+1)'Px(k+1) - x(k)'Px(k) =$

$$= x(k)'(A'PA - P)x(k) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad A'PA - P < 0$$

- Portanto, para determinar se A é estável, basta procurar uma solução factível $P = P' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ para o problema (LMIs):

$$P > 0 \ \ ; \ \ A'PA - P < 0$$

Teorema 2 (Lyapunov)

Os autovalores de A têm valor absoluto menor do que 1 *se e somente se para qualquer matriz simétrica definida positiva Q a equação discreta de Lyapunov*

$$A'PA - P = -Q$$

tiver uma única solução $P = P' > 0$

Sistema de Equações

- Resolvendo a equação de Lyapunov $A'PA - P + Q = 0$
- Matlab: `[P]=dlyap(A',Q)`
- A equação de Lyapunov $A'PA - P = -Q$ pode ser reescrita como

$$\left[A' \otimes A'\right] \text{vec}\,(P) = \text{vec}\,(P) - \text{vec}\,(Q)$$

- sistema de equações lineares

- Pode ser reduzido a um sistema de $n(n+1)/2$ equações e $n(n+1)/2$ incógnitas.
- Usando LMI solvers

$$\min \ \mathbf{Tr}(P)$$

$$P > 0 \ \ ; \ \ A'PA - P + Q < 0$$

- Usando complemento de Schur

$$\min_{P>0} \ \mathbf{Tr}(P)$$

$$\begin{bmatrix} P & PA \\ A'P & P-Q \end{bmatrix} > 0 \iff A'PP^{-1}PA - P + Q < 0 \iff \begin{bmatrix} P-Q & A'P \\ PA & P \end{bmatrix} > 0$$

Condições equivalentes

Existe $P = P' > 0$ tal que

$$A'PA - P < 0$$

se e somente se existir $W = W' > 0$ tal que

$$AWA' - W < 0$$

$$\begin{bmatrix} P & A'P \\ PA & P \end{bmatrix} > 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} P^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & A'P \\ PA & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P^{-1} & P^{-1}A' \\ AP^{-1} & P^{-1} \end{bmatrix} > 0$$

Note ainda que $\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & A'P \\ PA & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & PA \\ A'P & P \end{bmatrix}$

- Autovalores de A e A' são os mesmos
- A é estável se e somente se A' também o for
- Homogeneidade:

$$\exists P = P' > 0 \; : \; A'PA - P < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists P = P' > 0 \; : \; A'PA - P < -\varepsilon \mathbf{I} \; , \forall \varepsilon \geq 0$$

Lema de Finsler

Teorema 3 (Finsler)

Considere $w \in \mathbb{R}^n$, $\mathscr{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *e* $\mathscr{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *com rank* $(\mathscr{B}) < n$ *e* $\mathscr{B}^\perp$ *uma base para o espaço nulo de* $\mathscr{B}$ *(isto é,* $\mathscr{B}\mathscr{B}^\perp = \mathbf{0}$*).*

Então, as seguintes condições são equivalentes:

1. $w'\mathscr{Q}w < 0, \ \forall \ w \neq 0 \ : \ \mathscr{B}w = 0$
2. $\mathscr{B}^{\perp\prime}\mathscr{Q}\mathscr{B}^\perp < 0$
3. $\exists \mu \in \mathbb{R} \ : \ \mathscr{Q} - \mu\mathscr{B}'\mathscr{B} < 0$
4. $\exists \mathscr{X} \in \mathbb{R}^{n\times m} \ : \ \mathscr{Q} + \mathscr{X}\mathscr{B} + \mathscr{B}'\mathscr{X}' < 0$

Prova

[① $\Rightarrow$ ②] Todo w tal que $\mathscr{B}w = \mathbf{0}$ pode ser escrito como $w = \mathscr{B}^{\perp}y$. Portanto,

$$w'\mathscr{Q}w < 0 \,\forall\, w \neq 0 : \mathscr{B}w = \mathbf{0} \implies y'\mathscr{B}^{\perp\prime}\mathscr{Q}\mathscr{B}^{\perp}y < 0 \,\forall\, y \neq 0 \implies \mathscr{B}^{\perp\prime}\mathscr{Q}\mathscr{B}^{\perp} < 0$$

[② $\Rightarrow$ ①]

$$\mathscr{B}^{\perp\prime}\mathscr{Q}\mathscr{B}^{\perp} < 0 \implies y'\mathscr{B}^{\perp\prime}\mathscr{Q}\mathscr{B}^{\perp}y < 0 \,\forall\, y \neq 0 \implies w'\mathscr{Q}w < 0 \,\forall\, w \neq 0 : \mathscr{B}w = \mathbf{0}$$

[③ $\Rightarrow$ ②], [④ $\Rightarrow$ ②] Multiplicando à esquerda por $\mathscr{B}^{\perp\prime}$ e à direita por $\mathscr{B}^{\perp}$, recupera-se $\mathscr{B}^{\perp\prime}\mathscr{Q}\mathscr{B}^{\perp} < 0$

[② $\Rightarrow$ ③] A matriz $\mathscr{B}$ pode ser escrita como $\mathscr{B} = \mathscr{B}_L\mathscr{B}_R$ com $\mathscr{B}_L$, $\mathscr{B}_R$ de rank completo. Então, defina $\mathscr{D} = \mathscr{B}_R'(\mathscr{B}_R\mathscr{B}_R')^{-1}(\mathscr{B}_L'\mathscr{B}_L)^{-1/2}$ e note que

$$\begin{bmatrix} \mathscr{D}' \\ \mathscr{B}^{\perp\prime} \end{bmatrix}(\mathscr{Q} - \mu\mathscr{B}'\mathscr{B})\begin{bmatrix} \mathscr{D} & \mathscr{B}^{\perp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathscr{D}'\mathscr{Q}\mathscr{D} - \mu\mathbf{I} & \mathscr{D}'\mathscr{Q}\mathscr{B}^{\perp} \\ \mathscr{B}^{\perp\prime}\mathscr{Q}\mathscr{D} & \mathscr{B}^{\perp\prime}\mathscr{Q}\mathscr{B}^{\perp} \end{bmatrix}$$

Comentários

Como por hipótese ② é verificado, $\mathscr{B}^{\perp\prime}\mathscr{Q}\mathscr{B}^{\perp} < 0$, e portanto existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{bmatrix} \mathscr{D}'\mathscr{Q}\mathscr{D} - \mu \mathbf{I} & \mathscr{D}'\mathscr{Q}\mathscr{B}^{\perp} \\ \mathscr{B}^{\perp\prime}\mathscr{Q}\mathscr{D} & \mathscr{B}^{\perp\prime}\mathscr{Q}\mathscr{B}^{\perp} \end{bmatrix} < 0$$

Conseqüentemente, existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $\mathscr{Q} - \mu\mathscr{B}'\mathscr{B} < 0$

[③ $\Rightarrow$ ④] Se ③ é verificado $\mathscr{X} = -\dfrac{\mu}{2}\mathscr{B}'$ satisfaz a condição ④

Comentários

- o Lema de Finsler pode ser utilizado para expressar condições de estabilidade (como as condições de Lyapunov) em termos de desigualdades matriciais

- Introduz novas variáveis $(\mu, \mathscr{X})$ em condições que envolvem apenas $\mathscr{Q}$, $\mathscr{B}$ e $\mathscr{B}^{\perp}$

- Novos graus de liberdade na análise de sistemas incertos, possibilidade de eliminação de variáveis e de não linearidades, possibilidade de estender condições de análise para a síntese de controladores e filtros

Condições equivalentes (sistemas contínuos)

$$w = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} \;;\; \mathscr{B} = \begin{bmatrix} A & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \;;\; \mathscr{B}^{\perp} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ A \end{bmatrix} \;;\; \mathscr{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & P \\ P & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

1. $\exists P = P' > 0$ tal que
$$\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \mathbf{0} & P \\ P & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} < 0 \;\forall\; x, \dot{x} \neq 0 \;:\; \begin{bmatrix} A & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} = 0$$
2. $\exists P = P' > 0$ tal que $\begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ A \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \mathbf{0} & P \\ P & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ A \end{bmatrix} = A'P + PA < 0$
3. $\exists \mu \in \mathbb{R}, P = P' > 0$ tais que
$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & P \\ P & \mathbf{0} \end{bmatrix} - \mu \begin{bmatrix} A & -\mathbf{I} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} A & -\mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mu A'A & \mu A' + P \\ \mu A + P & -\mu \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0$$
4. $\exists \mathscr{X} \in \mathbb{R}^{2n \times n}, P = P' > 0$ tais que
$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & P \\ P & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \mathscr{X} \begin{bmatrix} A & -\mathbf{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A' \\ -\mathbf{I} \end{bmatrix} \mathscr{X}' < 0$$

Condições equivalentes (sistemas discretos):

$$w = \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k+1) \end{bmatrix} \;;\; \mathscr{B} = \begin{bmatrix} A & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \;;\; \mathscr{B}^{\perp} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ A \end{bmatrix} \;;\; \mathscr{Q} = \begin{bmatrix} -P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P \end{bmatrix}$$

① $\exists P = P' > 0 \;:\; w' \begin{bmatrix} -P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P \end{bmatrix} w < 0 \; \forall \; w \neq 0 \;:\; \begin{bmatrix} A & -\mathbf{I} \end{bmatrix} w = 0$

② $\exists P = P' > 0 \;:\; \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ A \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} -P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ A \end{bmatrix} = A'PA - P < 0$

③ $\exists \mu \in \mathbb{R}, P = P' > 0$

$: \begin{bmatrix} -P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P \end{bmatrix} - \mu \begin{bmatrix} A' \\ -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & -\mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mu A'A - P & \mu A' \\ \mu A & -\mu \mathbf{I} + P \end{bmatrix} < 0$

④ $\exists \mathscr{X} \in \mathbb{R}^{2n \times n}, P = P' > 0 \;:\; \begin{bmatrix} -P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P \end{bmatrix} + \mathscr{X} \begin{bmatrix} A & -\mathbf{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A' \\ -\mathbf{I} \end{bmatrix} \mathscr{X}' < 0$

Particionando os multiplicadores

- Definindo as partições $X_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $X_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ em $\mathscr{X}$

$$\mathscr{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

a condição ④ pode ser reescrita como $\exists X_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $X_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $P = P' > 0$ tais que

$$\begin{bmatrix} X_1 A + A' X_1' & P - X_1 + A' X_2' \\ P + X_2 A - X_1' & -X_2 - X_2' \end{bmatrix} < 0 \qquad \text{(caso contínuo)}$$

$$\begin{bmatrix} -P + X_1 A + A' X_1' & -X_1 + A' X_2' \\ X_2 A - X_1' & P - X_2 - X_2' \end{bmatrix} < 0 \qquad \text{(caso discreto)}$$

- Note que, no caso discreto, com a escolha $X_1 = \mathbf{0}$, $X_2 = X_2' = P$ recupera-se a forma de Schur de $A'PA - P < 0$

Abordagem descritora

Sistemas equivalentes

① $\dot{x} = Ax,$ ② $\begin{cases} \dot{x} = y \\ y = Ax \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow E\dot{\xi} = \bar{A}\xi$

Ao sistema ②, pode-se associar a seguinte função de Lyapunov (aumentada):

$v(x) = \xi' \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xi = x'Px$

Como

$$\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & F \\ 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & 0 \\ F' & G' \end{bmatrix}$$

tem-se que

$$v(x) = \xi' \begin{bmatrix} P & F \\ 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xi = \xi' \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & 0 \\ F' & G' \end{bmatrix} \xi$$

e assim (o símbolo $\star$ representa um bloco simétrico na LMI)

$$\dot{v}(x) = \xi' \begin{bmatrix} P & F \\ 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ A & -I \end{bmatrix} \xi + \xi' \begin{bmatrix} 0 & A' \\ I & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & 0 \\ F' & G' \end{bmatrix} \xi =$$

$$\xi' \begin{bmatrix} A'F' + FA & P - F + A'G' \\ \star & -G - G' \end{bmatrix} \xi$$

Lema da Projeção

- Dados $\mathscr{Q} = \mathscr{Q}' \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathscr{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $\mathscr{B} \in \mathbb{R}^{r\times n}$, existe $\mathscr{X} \in \mathbb{R}^{r\times m}$ tal que

$$\mathscr{Q} + \mathscr{A}'\mathscr{X}'\mathscr{B} + \mathscr{B}'\mathscr{X}\mathscr{A} < 0$$

se e somente se

$$\mathscr{A}_\perp' \mathscr{Q} \mathscr{A}_\perp < 0 \ \text{ e } \ \mathscr{B}_\perp' \mathscr{Q} \mathscr{B}_\perp < 0 \quad \text{com} \ \ \mathscr{A}\mathscr{A}_\perp = 0 \ , \ \mathscr{B}\mathscr{B}_\perp = 0$$

Note que, no caso particular $\mathscr{A} = \mathbf{I}$, obtém-se a equivalência ② $\Leftrightarrow$ ④ do Lema de Finsler.

Lema da Projeção Recíproca

- Dados $P = P' > 0$, $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $Q = Q' \in \mathbb{R}^{n\times n}$, tem-se

$$Q + S + S' < 0$$

se e somente se existir $W \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que

$$\begin{bmatrix} Q + P - (W + W') & S' + W' \\ S + W & -P \end{bmatrix} < 0$$

Lema da Projeção: prova

Prova: usando o Lema da Projeção, com $\mathscr{X} = W$ e

$$\mathscr{A} = \begin{bmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \;\; ; \;\; \mathscr{A}_\perp = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \;\; ; \;\; \mathscr{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \;\; ; \;\; \mathscr{B}_\perp = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \;\; ; \;\; \mathscr{Q} = \begin{bmatrix} Q+P & S' \\ S & -P \end{bmatrix}$$

tem-se

$$\begin{bmatrix} Q+P & S' \\ S & -P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{I} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} W \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} W' \begin{bmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0$$

se e somente se

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q+P & S' \\ S & -P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} = Q+S+S' < 0 \;\text{ e }\; \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q+P & S' \\ S & -P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} = -P < 0$$

Aplicação: Condições Equivalentes de Estabilidade

- $\max_i \ \mathrm{Re}\{\lambda_i(A)\} < 0, \ i = 1, \ldots, n$

se e somente se existir $P = P' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que

$$A'P + PA < 0 \ , \ \ P > 0$$

ou, equivalentemente, se e somente se existir $Y = Y' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que

$$AY + YA' < 0 \ , \ \ Y > 0$$

Aplicando o Lema da Projeção Recíproca nesse último par de desigualdades, com $Q = \mathbf{0}$, $S' = AY$ e $S = YA'$, tem-se a condição equivalente

$$\begin{bmatrix} Y - W - W' & AY + W' \\ YA' + W & -Y \end{bmatrix} < 0$$

Aplicando a transformação de congruência

$$\begin{bmatrix} W^{-T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Y^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y - W - W' & AY + W' \\ YA' + W & -Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Y^{-1} \end{bmatrix} < 0$$

com $W^{-T} = (W^{-1})'$, produz

$$\begin{bmatrix} W^{-T}YW^{-1} - W^{-1} - W^{-T} & W^{-T}A + Y^{-1} \\ A'W^{-1} + Y^{-1} & -Y^{-1} \end{bmatrix} < 0$$

Fazendo a mudança de variável $V = W^{-1}$, tem-se

$$\begin{bmatrix} V'YV - V - V' & V'A + Y^{-1} \\ A'V + Y^{-1} & -Y^{-1} \end{bmatrix} < 0$$

Aplicando Schur no termo $V'YV$, obtém-se

$$\begin{bmatrix} -V - V' & V'A + Y^{-1} & V' \\ A'V + Y^{-1} & -Y^{-1} & \mathbf{0} \\ V & \mathbf{0} & -Y^{-1} \end{bmatrix} < 0$$

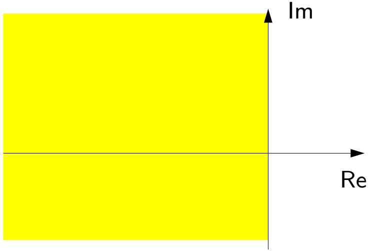
Finalmente, impondo $X = Y^{-1}$, chega-se à condição LMI

$$\begin{bmatrix} -V - V' & V'A + X & V' \\ A'V + X & -X & \mathbf{0} \\ V & \mathbf{0} & -X \end{bmatrix} < 0$$

Note que na última expressão a matriz de Lyapunov X não multiplica a matriz A.

Regiões no plano complexo

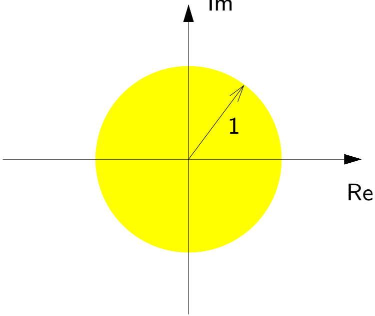
- O estudo da estabilidade de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ resume-se à identificar uma região no plano complexo na qual estão os autovalores λ_i, $i = 1, \ldots, n$ da matriz.



$$\text{Re}\{\lambda_i(A)\} < 0 \quad , \quad i = 1, \ldots, n$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists P = P' > 0 \;:\; A'P + PA < 0$$



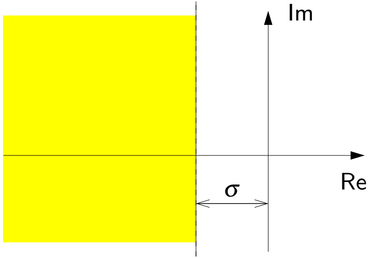
$$|\lambda_i(A)| < 1 \quad , \quad i = 1, \ldots, n$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists P = P' > 0 \;:\; A'PA - P < 0$$

Regiões no plano complexo

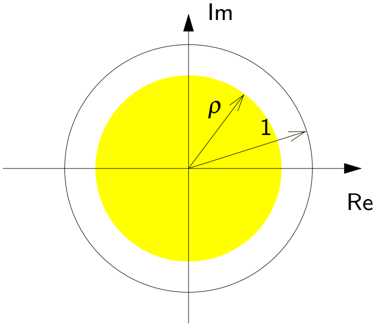
- Estabilidade em relação ao semiplano esquerdo deslocado e em relação ao círculo de raio ρ centrado na origem



$$\mathrm{Re}\{\lambda_i(A+\sigma\mathbf{I})\}<0 \quad , \quad i=1,\ldots,n$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists P=P'>0 \;:\; (A+\sigma\mathbf{I})'P+P(A+\sigma\mathbf{I})<0$$



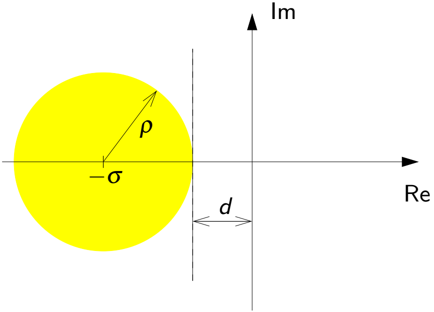
$$|\lambda_i(A/\rho)|<1 \quad , \quad i=1,\ldots,n$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists P=P'>0 \;:\; A'PA-\rho^2P<0$$

Regiões no plano complexo

- Estabilidade em relação a um círculo de raio ρ centrado em $(-\sigma, 0)$, distante d do eixo imaginário



$$\left|\lambda_i\left\{\frac{A+\sigma\mathbf{I}}{\rho}\right\}\right|<1 \quad \Leftrightarrow \quad \exists P=P'>0 \ : \ (A+\sigma\mathbf{I})'P(A+\sigma\mathbf{I})-\rho^2P<0$$

$$\Leftrightarrow \quad \exists P=P'>0 \ : \ \frac{1}{\rho}(A+d\mathbf{I})'P(A+d\mathbf{I})+(A+d\mathbf{I})'P+P(A+d\mathbf{I})<0$$

$\mathscr{D}$-estabilidade

- Uma região $\mathscr{D}$ no plano complexo pode ser descrita como

$$\mathscr{D} = \left\{ z \in \mathbb{C} \ : \ R_{11} + R_{12}z + R_{12}'z^* + R_{22}zz^* < 0 \right\}$$

com $R_{11} = R_{11}' \in \mathbb{R}^{d\times d}$, $R_{22} = R_{22}' \in \mathbb{R}^{d\times d}$ submatrizes de $R \in \mathbb{R}^{2d\times 2d}$ dada por

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{12}' & R_{22} \end{bmatrix}$$

sendo que d é a ordem da região. Assumindo-se $R_{22} \geq 0$, tem-se que $\mathscr{D}$ representa regiões convexas simétricas em relação ao eixo real.

$$\lambda_i(A) \in \mathscr{D} \ \Leftrightarrow \ \exists P = P' > 0 \ : \ R_{11} \otimes P + R_{12} \otimes (PA) + R_{12}' \otimes (A'P) + R_{22} \otimes A'PA < 0$$

- Exemplos ($d = 1$): $\quad R_{\text{cont.}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad R_{\text{disc.}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$R_C = \begin{bmatrix} 2d + d^2/\rho & 1 + d/\rho \\ 1 + d/\rho & 1/\rho \end{bmatrix}$$ círculo de raio ρ centrado em $(-d-\rho, 0)$