IA892 – Análise e Controle de Sistemas Lineares por Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs)

Aula 8: Realimentação de Estados

Pedro L. D. Peres & Ricardo C. L. F. Oliveira

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas

2^o Semestre 2022

Tópicos

Estabilização por Realimentação de Estado

Considere o sistema linear

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad ; \qquad x \in \mathbb{R}^n, \; u \in \mathbb{R}^m$$

Problema

Determinar uma matriz $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que a lei de controle linear $u(t) = Kx(t)$ estabilize assintoticamente o sistema em malha fechada

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t)$$

- Soluções
  - Alocação de pólos (`place`, `acker` do Matlab) no semi-plano esquerdo
  - Escrever as condições de estabilidade para o sistema em malha fechada, aplicar transformações de congruência, equivalências e mudanças de variáveis que linearizem o problema, resultando em uma LMI (às vezes precisa de uma pitada de Schur)

Estabilidade

- O sistema em malha fechada $(A+BK)$ é estável se e somente se existir uma matriz de Lyapunov $P = P' > 0$ tal que

$$(A+BK)'P + P(A+BK) < 0, \quad P > 0$$

- Congruência

$$P^{-1}\big((A+BK)'P + P(A+BK)\big)P^{-1} = P^{-1}A' + AP^{-1} + P^{-1}K'B' + BKP^{-1} < 0$$
$$P^{-1}PP^{-1} = P^{-1} > 0$$

- Mudança de variáveis: $W = P^{-1}$, $Z = KW$

$$AW + WA' + BZ + Z'B' < 0, \quad W > 0$$

Condição de síntese em termos de LMIs

Lema 1

Existe K tal que $(A+BK)$ é estável se e somente se existirem $W = W' \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $Z \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tais que

$$W > 0 \quad ; \quad AW + WA' + BZ + Z'B' < 0$$

No caso afirmativo, o ganho é dado por $K = ZW^{-1}$

Prova: Com $W > 0$ e Z dados, a LMI acima pode ser reescrita

$$(A+BZW^{-1})W + W(A+BZW^{-1})' < 0 \quad \Leftrightarrow \quad (A+BK)W + W(A+BK)' < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad W^{-1}\big((A+BK)W + W(A+BK)'\big)W^{-1} < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (A+BK)'P + P(A+BK) < 0 \quad \text{com} \quad P = W^{-1}\,, \quad K = ZW^{-1}$$

- A busca conjunta do ganho K estabilizante e da matriz P de Lyapunov foi transformada em um problema convexo

Outras condições de estabilizabilidade

O sistema é estabilizável se existir K e $P > 0$ tais que

$$(A+BK)'P + P(A+BK) = A'P + PA + K'B'P + PBK < 0$$

- Condições equivalentes podem ser obtidas se a LMI acima for comparada com a condição ④ do Lema de Finsler

$$\underbrace{A'P+PA}_{\mathscr{Q}} + \underbrace{K'}_{\mathscr{X}}\,\underbrace{B'P}_{\mathscr{B}} + \underbrace{PB}_{\mathscr{B}'}\,\underbrace{K}_{\mathscr{X}'} < 0$$

- A partir de $\mathscr{B} = B'P$, $P > 0$, tem-se $\mathscr{B}^{\perp} = P^{-1}B'^{\perp}$. De fato,

$$\mathscr{B}x = 0 \iff B'Px = 0 \iff B'y = 0\ ,\ y = Px\ ,\ x \neq 0, y \neq 0$$

$$\mathscr{B}\mathscr{B}^{\perp} = \mathbf{0} \iff B'PP^{-1}B'^{\perp} = B'B'^{\perp} = \mathbf{0}$$

Outras condições de estabilizabilidade

- Existem $P > 0$ e K' tais que

$$(A+BK)'P + P(A+BK) = A'P + PA + K'B'P + PBK < 0$$

se e somente se existir $P > 0$ tal que

$$B'^{\perp'} P^{-1} \left(A'P + PA\right) P^{-1} B'^{\perp} < 0$$

se e somente se exitir $P > 0$ e μ tais que

$$A'P + PA - \mu PBB'P < 0$$

- condições equivalentes: existe $W = P^{-1} > 0$ tal que

$$WA' + AW + WK'B' + BKW < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad B'^{\perp'} \left(WA' + AW\right) B'^{\perp} < 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \exists \mu \quad : \quad WA' + AW - \mu BB' < 0$$

- note que $\mu > 0$, pois senão $WA' + AW < 0 \quad \Longrightarrow \quad A$ seria estável

Condição LMI alternativa

Lema 2

Existe K tal que $(A+BK)$ é estável se e somente se existir uma matriz simétrica definida positiva $W \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que

$$B'^{\perp'}(WA'+AW)B'^{\perp} < 0 \iff \exists \mu \ : \ WA'+AW-\mu BB' < 0$$

$$\iff WA'+AW+WK'B'+BKW < 0$$

No caso afirmativo, o ganho é dado por $K = -\dfrac{\mu}{2}B'W^{-1}$

Prova: Com $K = -\dfrac{\mu}{2}B'W^{-1}$ tem-se

$$(A+BK)W+W(A+BK)' = (A-\frac{\mu}{2}BB'W^{-1})W+W(A-\frac{\mu}{2}BB'W^{-1})' =$$
$$= AW+WA'-\mu BB' < 0$$

Condição LMI alternativa

- A existência de $P > 0$ e $\mu > 0$ tais que

$$A'P + PA - \mu PBB'P < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad A'(\mu P) + (\mu P)A - (\mu P)BB'(\mu P) < 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad (\mu P)^{-1}\left(A'(\mu P) + (\mu P)A - (\mu P)BB'(\mu P)\right)(\mu P)^{-1} < 0$$

equivale à existência de $W = (\mu P)^{-1} > 0$ tal que

$$WA' + AW - BB' < 0$$

Lema 3

Existe K tal que $(A+BK)$ é estável se e somente se existir uma matriz simétrica definida positiva $W \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que

$$WA' + AW - BB' < 0$$

No caso afirmativo, o ganho é dado por $K = -\dfrac{1}{2}B'W^{-1}$

Lema da projeção recíproca

- Outra condição equivalente para realimentação de estados pode ser obtida do Lema da Projeção Recíproca aplicado ao sistema dual A', isto é, a matriz A é Hurwitz se e somente se existirem matrizes V e $X = X'$ tais que

$$\begin{bmatrix} -V-V' & V'A'+X & V' \\ AV+X & -X & \mathbf{0} \\ V & \mathbf{0} & -X \end{bmatrix} < 0$$

Fazendo $A \leftarrow A+BK$, $KV = Z$ chega-se ao resultado:

Lema 4

Existe K tal que $(A+BK)$ é estável se e somente se existir uma matriz simétrica $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$, matrizes $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $Z \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tais que

$$\begin{bmatrix} -V-V' & V'A'+Z'B'+X & V' \\ AV+BZ+X & -X & \mathbf{0} \\ V & \mathbf{0} & -X \end{bmatrix} < 0$$

No caso afirmativo, $K = ZV^{-1}$.

Lema de Finsler

- No caso contínuo, a condição ④ do Lema de Finsler aplicada ao sistema dual em malha fechada seria

$$\begin{bmatrix} X_1A' + AX_1' & W - X_1 + AX_2' \\ W + X_2A' - X_1' & -X_2 - X_2' \end{bmatrix} < 0$$

Sem perda de generalidade, pode-se escolher $X_1 = X'$ e $X_2 = \xi X'$, para $\xi > 0$ arbitrário. Assim, a realimentação de estado pode ser caracterizada pelo lema a seguir.

Lema 5

Existe K tal que $(A + BK)$ é estável se e somente se existir uma matriz simétrica definida positiva $W \in \mathbb{R}^{n\times n}$, matrizes $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $Z \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tais que

$$\begin{bmatrix} AX + X'A' + BZ + Z'B' & W - X' + \xi AX + \xi BZ \\ W - X + \xi X'A' + \xi Z'B' & -\xi X - \xi X' \end{bmatrix} < 0$$

para $\xi > 0$ arbitrário. No caso afirmativo, $K = ZX^{-1}$.

- O bloco $(1,1)$ da LMI reproduz a condição do Lema 1 porém sem exigir simetria da matriz X

Prova: Lema da Projeção (ver [PDSV09])

Definindo $A_{cl} = A + BZX^{-1}$, tem-se que a existência de $W = W'$ e X tais que

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & W \\ W & 0 \end{bmatrix}}_{Z} + \begin{bmatrix} A_{cl} \\ -I \end{bmatrix} X \underbrace{\begin{bmatrix} I & \xi I \end{bmatrix}}_{V} + \begin{bmatrix} I \\ \xi I \end{bmatrix} X' \underbrace{\begin{bmatrix} A'_{cl} & -I \end{bmatrix}}_{U}$$

$$= \begin{bmatrix} A_{cl}X + X'A'_{cl} & \xi A_{cl}X - X' + W \\ \xi X'A'_{cl} - X + W & -\xi X - \xi X' \end{bmatrix} < 0$$

é equivalente a existir $W = W'$ tal que

$$N'_U Z N_U = \begin{bmatrix} I \\ A'_{cl} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 0 & W \\ W & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ A'_{cl} \end{bmatrix} = A_{cl}W + WA'_{cl} < 0$$

e

$$N'_V Z N_V = \begin{bmatrix} \xi I \\ -I \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 0 & W \\ W & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi I \\ -I \end{bmatrix} = -2\xi W < 0$$

que implica $W > 0$ para qualquer $\xi > 0$.

Realimentação de Estado — Controle Ótimo $\mathscr{H}_2$ — Caso Contínuo

- Seja o sistema linear

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_2u(t) + B_1w(t) \quad (1)\\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \quad (2) \end{aligned}$$

Problema: Determinar $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que $u(t) = Kx(t)$ estabilize assintoticamente e minimize a norma $\mathscr{H}_2$ do sistema em malha fechada

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + B_2K)x(t) + B_1w(t)\\ y(t) &= (C + DK)x(t) \end{aligned}$$

$$H(s) = (C + DK)\big(s\mathbf{I} - (A + B_2K)\big)^{-1}B_1$$

- Soluções
  - Regulador linear quadrático (`lqr` com $Q = C'C$, $R = D'D$ e $S = C'D$)
  - Escrever as condições de cômputo de norma $\mathscr{H}_2$ para o sistema em malha fechada, congruência + mudanças de variáveis

Controle Ótimo $\mathscr{H}_2$ — Caso Contínuo

- O ganho de realimentação de estado que minimiza o critério quadrático

$$J = \min_{u(t)} \int_0^{+\infty} y(t)'y(t)dt = \int_0^{+\infty} \left(x'C'Cx + x'C'Du + u'D'Du\right)dt$$

é dado por $K = -(D'D)^{-1}(B_2'P + D'C)$

sendo $P = P' > 0$ a solução da equação algébrica de Riccati

$$A'P + PA - (PB_2 + C'D)(D'D)^{-1}(B_2'P + D'C) + C'C = \mathbf{0}$$

- O valor ótimo do critério é dado por $J^* = x(0)'Px(0)$, que se iguala ao mínimo valor da norma $\mathscr{H}_2$ ao quadrado sempre que $x(0)x(0)' = B_1B_1'$

Controle Ótimo $\mathscr{H}_2$ — Caso Contínuo

- De fato, com $K = -(D'D)^{-1}(B_2'P + D'C)$, em malha fechada tem-se

$$A_f = A - B_2(D'D)^{-1}(B_2'P + D'C) \ , \ \ C_f = C - D(D'D)^{-1}(B_2'P + D'C)$$

- é possível reescrever a equação de Riccati como

$$A_f'P + PA_f + C_f'C_f = \mathbf{0}$$

- Comparando com o gramiano de observabilidade, tem-se que a norma $\mathscr{H}_2$ é dada por

$$\|H(s)\|_2^2 = \mathbf{Tr}(B_1'PB_1)$$

Controle Ótimo $\mathscr{H}_2$ — Caso Contínuo — Solução LMI

$$\min_{K,\, P = P' > 0} \quad \mathbf{Tr}\big(B_1' P B_1\big)$$

$$(A + B_2K)'P + P(A + B_2K) + (C + DK)'(C + DK) < 0$$

A restrição pode ser re-escrita

$$\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (A + B_2K)'P + P(A + B_2K) & (C + DK)' \\ (C + DK) & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} AW + WA' + B_2Z + Z'B_2' & WC' + Z'D' \\ CW + DZ & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \ , \quad W = P^{-1} \ , \ Z = KP^{-1}$$

O critério pode ser formulado como $\min \mathbf{Tr}\big(X\big)$ sujeito a

$$\begin{bmatrix} X & B_1'P \\ PB_1 & P \end{bmatrix} > 0$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & B_1'P \\ PB_1 & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{bmatrix} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} X & B_1' \\ B_1 & W \end{bmatrix} > 0 \ , \quad W = P^{-1}$$

Controle $\mathscr{H}_2$ por LMI (primal)

Lema 6

O sistema (1)-(2) *é estabilizável por realimentação de estados se e somente se existir uma solução para o problema convexo de otimização*

$$\min_{X=X',Z,W=W'>0} \quad \mathbf{Tr}(X)$$

$$\begin{bmatrix} X & B_1' \\ B_1 & W \end{bmatrix} > 0$$

$$\begin{bmatrix} AW+B_2Z+WA'+Z'B_2' & WC'+Z'D' \\ CW+DZ & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0$$

Na solução ótima $\rho^2 = \mathbf{Tr}(X)$, $K = ZW^{-1}$ *é tal que* $\|H(s)\|_2 = \rho$

Ou, de maneira equivalente, partindo-se do problema dual

$$\min_{K,W=W'>0} \quad \mathbf{Tr}\big((C+DK)W(C+DK)'\big)$$

$$(A+B_2K)W+W(A+B_2K)'+B_1B_1' < 0$$

Controle Ótimo $\mathscr{H}_2$ — Caso Contínuo — Solução LMI (Dual)

Lema 7

O sistema (1)-(2) *é estabilizável por realimentação de estados se e somente se existir uma solução para o problema convexo de otimização*

$$\min_{X=X',\,Z,\,W=W'>0} \quad \mathbf{Tr}(X)$$

$$\begin{bmatrix} X & CW+DZ \\ WC'+Z'D' & W \end{bmatrix} > 0$$

$$\begin{bmatrix} AW+B_2Z+WA'+Z'B_2' & B_1 \\ B_1' & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0$$

Na solução ótima $\rho^2 = \mathbf{Tr}(X)$, $K = ZW^{-1}$ *é tal que* $\|H(s)\|_2 = \rho$

- Para sistemas precisamente conhecidos, as estratégias primal e dual fornecem os mesmos resultados para cômputo de ganho estabilizante e norma $\mathscr{H}_2$, mas diferenças podem ocorrer nas extensões para custo garantido.

Realimentação de Estado — Controle Ótimo $\mathscr{H}_\infty$ — Caso Contínuo

Seja o sistema linear

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_2 u(t) + B_1 w(t) \quad (3) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \quad (4) \end{aligned}$$

Problema: Determinar $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que $u(t) = Kx(t)$ estabilize assintoticamente e minimize a norma $\mathscr{H}_\infty$ do sistema em malha fechada

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + B_2 K)x(t) + B_1 w(t) \\ y(t) &= (C + DK)x(t) \end{aligned}$$

$$H(s) = (C + DK)\big(s\mathbf{I} - (A + B_2 K)\big)^{-1} B_1$$

- Soluções
  - Resolução iterativa de equações de Riccati (`care` no Matlab)
  - Escrever as condições de cômputo de norma $\mathscr{H}_\infty$ para o sistema em malha fechada, congruência + mudanças de variáveis

Controle Ótimo $\mathscr{H}_\infty$ — Caso Contínuo

Em malha fechada, definindo $A_f = A + B_2K$ e $C_f = C + DK$, tem-se que $\|H(s)\|_\infty < \gamma$ se e somente se existir $P = P' > 0$ tal que

$$\begin{bmatrix} A_f'P + PA_f + C_f'C_f & PB_1 \\ B_1'P & -\gamma^2\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0$$

ou $\quad A_f'P + PA_f + C_f'C_f + \gamma^2 PB_1B_1'P < 0$

- $P = P' > 0$ pode ser obtida da solução da equação modificada de Riccati

$$A'P + PA + C'C + \gamma^{-2}PB_1B_1'P - (PB_2 + C'D)(D'D)^{-1}(B_2'P + D'C) = \mathbf{0}$$

e $K = -(D'D)^{-1}(B_2'P + D'C)$ garante $\|H(s)\|_\infty < \gamma$

- Para obter o ganho ótimo, reduzir iterativamente γ até o mínimo valor tal que existe $P = P' > 0$ solução da equação de Riccati

Controle Ótimo $\mathscr{H}_\infty$ — Solução LMI

Lema 8

O sistema (3)-(4) *é estabilizável por realimentação de estados se e somente se existir uma solução para o problema convexo de otimização*

$$\min_{Z,\, W = W' > 0} \quad \mu$$

$$\begin{bmatrix} AW + WA' + B_2 Z + Z'B_2' & WC' + Z'D' & B_1 \\ CW + DZ & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ B_1' & \mathbf{0} & -\mu\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0$$

Na solução ótima, $K = ZW^{-1}$ *assegura* $\|H(s)\|_\infty = \sqrt{\mu}$

Comentários

- A matriz W pode tender à singularidade no ótimo;
- Note que o bloco (1,1) da LMI é a condição de estabilizabilidade.

Estabilização por Realimentação de Estado

Considere o sistema linear

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad ; \quad x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m$$

Problema

Determinar uma matriz $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que a lei de controle linear $u(k) = Kx(k)$ estabilize assintoticamente o sistema em malha fechada

$$x(k+1) = (A + BK)x(k)$$

- Soluções
  - Alocação de pólos (`place`, `acker` do Matlab) dentro do círculo unitário
  - Escrever as condições de estabilidade para o sistema em malha fechada, aplicar complemento de Schur, transformações de congruência, eliminações e mudanças de variáveis que linearizem o problema, resultando em uma LMI

Estabilidade

- O sistema em malha fechada $(A+BK)$ é estável se e somente se existir uma matriz de Lyapunov $P = P' > 0$ tal que

$$(A+BK)'P(A+BK) - P < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} P & (A+BK)'P \\ P(A+BK) & P \end{bmatrix} > 0$$

- Congruência

$$\begin{bmatrix} P^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & (A+BK)'P \\ P(A+BK) & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P^{-1} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} P^{-1} & P^{-1}(A+BK)' \\ (A+BK)P^{-1} & P^{-1} \end{bmatrix} > 0$$

- Mudança de variáveis: $W = P^{-1}$, $Z = KW$

$$\begin{bmatrix} W & WA' + Z'B' \\ AW + BZ & W \end{bmatrix} > 0$$

Condição LMI

Lema 9

Existe K tal que $(A+BK)$ é estável se e somente se existirem uma matriz simétrica $W \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $Z \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tais que

$$\begin{bmatrix} W & WA' + Z'B' \\ AW + BZ & W \end{bmatrix} > 0$$

No caso afirmativo, o ganho é dado por $K = ZW^{-1}$

Prova: Com $W > 0$ e Z dados, a LMI acima pode ser reescrita

$$\begin{bmatrix} W & W(A+BZW^{-1})' \\ (A+BZW^{-1})W & W \end{bmatrix} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (A+BK)W(A+BK)' - W < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} P & (A+BK)'P \\ P(A+BK) & P \end{bmatrix} > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (A+BK)'P(A+BK) - P < 0 \quad \text{com} \quad P = W^{-1}\,, \quad K = ZW^{-1}$$

- A restrição $W > 0$ já aparece de maneira explícita na LMI

Lema de Finsler

- Estabilidade — condição ④ do Lema de Finsler
  - O sistema em malha fechada $(A+BK)$ é estável se e somente se existirem $P = P' > 0$, X_1 e X_2 tais que

$$\begin{bmatrix} P - X_1(A+BK) - (A+BK)'X_1' & -X_1 + (A+BK)'X_2' \\ X_2(A+BK) - X_1' & X_2 + X_2' - P \end{bmatrix} > 0$$

  - Escolhendo $X_1 = \mathbf{0}$ e aplicando a transformação de congruência

$$\begin{bmatrix} X_2^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & X_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & (A+BK)'X_2' \\ X_2(A+BK) & X_2 + X_2' - P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_2^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & X_2^{-1} \end{bmatrix}' =$$

$$= \begin{bmatrix} X_2^{-1}PX_2'^{-1} & X_2^{-1}(A+BK)' \\ (A+BK)X_2'^{-1} & X_2'^{-1} + X_2^{-1} - X_2^{-1}PX_2'^{-1} \end{bmatrix} > 0$$

  - Fazendo as mudanças de variáveis $W = X_2^{-1}PX_2'^{-1}$, $G' = X_2^{-1}$ tem-se

$$\begin{bmatrix} W & G'(A+BK)' \\ (A+BK)G & G + G' - W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W & G'A' + Z'B' \\ AG + BZ & G + G' - W \end{bmatrix} > 0 \quad ; \quad Z = KG$$

Condição LMI resultante

Lema 10

Existe K tal que $(A+BK)$ é estável se e somente se existirem $W = W' \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $G \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $Z \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tais que

$$\begin{bmatrix} W & G'A' + Z'B' \\ AG + BZ & G + G' - W \end{bmatrix} > 0$$

No caso afirmativo, o ganho é dado por $K = ZG^{-1}$

Prova: Suficiência. Da condição do lema, tem-se $W > 0$ e $G + G' > W > 0$, o que implica que G^{-1} existe. Então, com $K = ZG^{-1}$ tem-se

$$\begin{bmatrix} W & G'(A+BZG^{-1})' \\ (A+BZG^{-1})G & G+G'-W \end{bmatrix} > 0 \quad \Longrightarrow \quad A + BZG^{-1} \text{ é estável}$$

Necessidade. Se $A+BK$ é estável, então $(A+BK)W(A+BK)' - W < 0$, $W > 0$, e a condição do Lema 10 é factível com $G = G' = W$.

Comentários

- Note que a escolha de $X_1 = \mathbf{0}$ na condição ④ do Lema de Finsler pode ser feita sem perda de generalidade (não introduz conservadorismo)

- Resultado equivalente ao do Lemas 9, porém com matrizes extras

- Desacopla a síntese do ganho K da matriz de Lyapunov W

$$\begin{bmatrix} W & G'A' + Z'B' \\ AG + BZ & G + G' - W \end{bmatrix} > 0$$

- Poderia ser formulado diretamente em termos da estabilidade do sistema dual $(A + BK)'$

- Restrições podem ser impostas sobre G e Z, para que $K = ZG^{-1}$ tenha uma estrutura particular, sem afetar a matriz de Lyapunov W

Outro resultado com parâmetro escalar ξ

Lema 11

Existe K tal que $(A+BK)$ é estável se e somente se existirem $W = W' \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $G \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $Z \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tais que

$$\begin{bmatrix} \xi AG + \xi G'A' + \xi BZ + \xi Z'B' - W & AG + BZ - \xi G' \\ G'A' + Z'B' - \xi G & W - G - G' \end{bmatrix} < 0$$

independentemente do valor de ξ, $-1 < \xi < 1$. No caso afirmativo, o ganho é dado por $K = ZG^{-1}$.

Note que a escolha $\xi = 0$ recai no resultado do Lema 10.

Prova: pelo lema da Projeção

Definindo $A_{cl} = A + BZG^{-1}$, tem-se que a existência de $W = W'$ e G tais que

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -W & 0 \\ 0 & W \end{bmatrix}}_{Z} + \begin{bmatrix} A_{cl} \\ -I \end{bmatrix} G \underbrace{\begin{bmatrix} \xi I & I \end{bmatrix}}_{V} + \begin{bmatrix} \xi I \\ I \end{bmatrix} G' \underbrace{\begin{bmatrix} A'_{cl} & -I \end{bmatrix}}_{U}$$

$$= \begin{bmatrix} \xi A_{cl} G + \xi G' A'_{cl} - W & A_{cl} G - \xi G' \\ G' A'_{cl} - \xi G & W - G - G' \end{bmatrix} < 0$$

é equivalente a existir $W = W'$ tal que

$$N'_U Z N_U = \begin{bmatrix} I \\ A'_{cl} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} -W & 0 \\ 0 & W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ A'_{cl} \end{bmatrix} = -W + A_{cl} W A'_{cl} < 0$$

e

$$N'_V Z N_V = \begin{bmatrix} I \\ -\xi I \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} -W & 0 \\ 0 & W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ -\xi I \end{bmatrix} = -(1 - \xi^2) W < 0$$

que implica $W > 0$, $\forall \xi \in (-1, 1)$.

Realimentação de Estado — Controle Ótimo $\mathscr{H}_2$ — Caso Discreto

Seja o sistema linear

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + B_2 u(k) + B_1 w(k) && (5) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) && (6) \end{aligned}$$

Problema: Determinar $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que $u(k) = Kx(k)$ estabilize assintoticamente e minimize a norma $\mathscr{H}_2$ do sistema em malha fechada

$$\begin{aligned} x(k+1) &= (A + B_2 K)x(k) + B_1 w(k) \\ y(k) &= (C + DK)x(k) \end{aligned}$$

$$H(z) = (C + DK)\big(z\mathbf{I} - (A + B_2 K)\big)^{-1} B_1$$

- Soluções
  - Regulador linear quadrático (caso discreto) (`dlqr` com $Q = C'C$, $R = D'D$ e $S = C'D$)
  - Escrever as condições de cômputo de norma $\mathscr{H}_2$ para o sistema em malha fechada, congruência + mudanças de variáveis

Controle Ótimo $\mathscr{H}_2$ — Caso Discreto

- O ganho de realimentação de estado que minimiza o critério quadrático

$$J = \min_{u(k)} \sum_{k=0}^{+\infty} y(k)'y(k) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k)'C'Cx(k) + x(k)'C'Du(k) + u(k)'D'Du(k)$$

é dado por $K = -(D'D + B_2'PB_2)^{-1}(B_2'PA + D'C)$

sendo $P = P' > 0$ a solução da equação algébrica discreta de Riccati

$$A'PA - P - (A'PB_2 + C'D)(D'D + B_2'PB_2)^{-1}(B_2'PA + D'C) + C'C = \mathbf{0}$$

- O valor ótimo do critério é dado por $J^* = x(0)'Px(0)$, que se iguala ao mínimo valor da norma $\mathscr{H}_2$ ao quadrado sempre que $x(0)x(0)' = B_1B_1'$

Controle Ótimo $\mathscr{H}_2$ — Caso Discreto

- Com $K = -(D'D + B_2'PB_2)^{-1}(B_2'PA + D'C)$ em malha fechada tem-se

$$A_f = A - B_2(D'D + B_2'PB_2)^{-1}(B_2'PA + D'C)$$

$$C_f = C - D(D'D + B_2'PB_2)^{-1}(B_2'PA + D'C)$$

- é possível reescrever a equação de Riccati como

$$A_f'PA_f - P + C_f'C_f = \mathbf{0}$$

- Comparando com o gramiano de observabilidade do caso discreto, tem-se que a norma $\mathscr{H}_2$ é dada por

$$\|H(z)\|_2^2 = \mathbf{Tr}(B_1'PB_1)$$

Controle Ótimo $\mathscr{H}_2$ — Solução LMI

O critério pode ser formulado como no caso contínuo, com $W = P^{-1}$,

$$\min \quad \mathbf{Tr}(X)$$

$$\begin{bmatrix} X & B_1' \\ B_1 & W \end{bmatrix} > 0$$

E a restrição pode ser escrita

$$(A+B_2K)'P(A+B_2K) - P + (C+DK)'(C+DK) < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} P & (A+B_2K)'P & (C+DK)' \\ P(A+B_2K) & P & 0 \\ (C+DK) & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0$$

Fazendo a transformação de congruência com diag$\{P^{-1}, P^{-1}, \mathbf{I}\}$ chega-se ao resultado a seguir.

Controle Ótimo $\mathscr{H}_2$ — Solução LMI

Lema 12

O sistema (5)-(6) *é estabilizável por realimentação de estados se e somente se existir uma solução para o problema convexo de otimização*

$$\min_{X=X',Z,W=W'>0} \quad \mathbf{Tr}(X)$$

$$\begin{bmatrix} X & B_1' \\ B_1 & W \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\begin{bmatrix} W & WA'+Z'B_2' & WC'+Z'D' \\ AW+B_2Z & W & 0 \\ CW+DZ & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0$$

Na solução ótima $\rho^2 = \mathbf{Tr}(X)$, $K = ZW^{-1}$ *é tal que* $\|H(z)\|_2 = \rho$

- Ou, de maneira equivalente:

$$\min \mathbf{Tr}\big((C+DK)W(C+DK)'\big)$$

$$(A+B_2K)W(A+B_2K)' - W + B_1B_1' < 0$$

Controle Ótimo $\mathscr{H}_2$ — Solução LMI (dual)

Lema 13

O sistema (5)-(6) *é estabilizável por realimentação de estados se e somente se existir uma solução para o problema convexo de otimização*

$$\min_{X=X', Z, W=W'>0} \quad \mathbf{Tr}(X)$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} X & CW+DZ \\ WC'+Z'D' & W \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\begin{bmatrix} W & AW+B_2Z & B_1 \\ WA'+Z'B_2 & W & \mathbf{0} \\ B_1' & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0$$

Na solução ótima $\rho^2 = \mathbf{Tr}(X)$, $K = ZW^{-1}$ *é tal que* $\|H(z)\|_2 = \rho$

Resultado equivalente (Finsler)

Lema 14

O sistema (5)-(6) *é estabilizável por realimentação de estados se e somente se existir uma solução para o problema convexo de otimização*

$$\min_{X=X',G,Z,W=W'>0} \quad \mathbf{Tr}(X)$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} X & B_1' \\ B_1 & W \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\begin{bmatrix} G+G'-W & G'A'+Z'B_2' & G'C'+Z'D' \\ AG+B_2Z & W & \mathbf{0} \\ CG+DZ & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0$$

Na solução ótima $\rho^2 = \mathbf{Tr}(X)$, $K = ZG^{-1}$ *é tal que* $\|H(z)\|_2 = \rho$

- Fazendo $G = G' = W$, recai-se no Lema 12.

Resultado equivalente (Finsler) — Prova

- Da primeira condição, $\mathbf{Tr}(X) \geq \mathbf{Tr}(B_1' W^{-1} B_1)$. Da segunda, definindo $A_{cl} = A + B_2 K$ e $C_{cl} = C + DK$ com $K = ZG^{-1}$, tem-se

$$\begin{bmatrix} G+G'-W & G'A_{cl}' & G'C_{cl}' \\ A_{cl}G & W & \mathbf{0} \\ C_{cl}G & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \implies \begin{bmatrix} G'W^{-1}G & G'A_{cl}' & G'C_{cl}' \\ A_{cl}G & W & \mathbf{0} \\ C_{cl}G & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0$$

pois $(G-W)'W^{-1}(G-W) = G'W^{-1}G - G - G' + W \geq 0$.
Pós-multiplicando a LMI da direita por $T = \mathrm{diag}(G^{-1}W, \mathbf{I}, \mathbf{I})$ e pré-multiplicando por T', tem-se

$$\begin{bmatrix} W & WA_{cl}' & WC_{cl}' \\ A_{cl}W & W & \mathbf{0} \\ C_{cl}W & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \iff \begin{bmatrix} W - WC_{cl}'C_{cl}W & WA_{cl}' \\ A_{cl}W & W \end{bmatrix} > 0$$

$$\iff \begin{bmatrix} W & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W^{-1} - C_{cl}'C_{cl} & A_{cl}'W^{-1} \\ W^{-1}A_{cl} & W^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & W \end{bmatrix} > 0$$

$$\iff A_{cl}'W^{-1}A_{cl} - W^{-1} + C_{cl}'C_{cl} < 0$$

Resultado equivalente (Finsler) — Dual

Lema 15

O sistema (5)-(6) *é estabilizável por realimentação de estados se e somente se existir uma solução para o problema convexo de otimização*

$$\min_{X=X',G,Z,W=W'>0} \mathbf{Tr}(X)$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} X & CG+DZ \\ G'C'+Z'D' & G+G'-W \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\begin{bmatrix} W & AG+B_2Z & B_1 \\ G'A'+Z'B_2' & G+G'-W & \mathbf{0} \\ B_1' & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0$$

Na solução ótima $\rho^2 = \mathbf{Tr}(X)$, $K = ZG^{-1}$ *é tal que* $\|H(z)\|_2 = \rho$

- Fazendo $G = G' = W$, recai-se no Lema 13.

Realimentação de Estado — Controle Ótimo $\mathscr{H}_\infty$ — Caso Discreto

Seja o sistema linear

$$x(k+1) = Ax(k) + B_2u(k) + B_1w(k) \quad (7)$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k) \quad (8)$$

Problema: Determinar $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tal que $u(k) = Kx(k)$ estabilize assintoticamente e minimize a norma $\mathscr{H}_\infty$ do sistema em malha fechada

$$\begin{aligned} x(k+1) &= (A+B_2K)x(k) + B_1w(k) \\ y(k) &= (C+DK)x(k) \end{aligned}$$

$$H(z) = (C+DK)\big(z\mathbf{I} - (A+B_2K)\big)^{-1}B_1$$

- Soluções
  - Resolução iterativa de equações de Riccati discretas (`dare` no Matlab)
  - Escrever as condições de cômputo de norma $\mathscr{H}_\infty$ para o sistema em malha fechada, congruência + mudanças de variáveis

Controle Ótimo $\mathcal{H}_\infty$ — Caso Discreto

Em malha fechada, definindo $A_f = A + B_2K$ e $C_f = C + DK$, tem-se que $\|H(z)\|_\infty < \gamma$ se e somente se existir $P = P' > 0$ tal que

$$\begin{bmatrix} A_f'PA_f - P + C_f'C_f & A_f'PB_1 \\ B_1'PA_f & B_1'PB_1 - \gamma^2\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0$$

ou $\quad A_f'PA_f - P + C_f'C_f + A_f'PB_1\left(B_1'PB_1 - \gamma^2\mathbf{I}\right)^{-1}B_1'PA_f < 0$

- $P = P' > 0$ pode ser obtida da solução da equação modificada de Riccati

$$\begin{aligned} &A'PA - P + C'C + A'PB_1\left(B_1'PB_1 - \gamma^2\mathbf{I}\right)^{-1}B_1'PA \\ &\qquad -(A'PB_2 + C'D)(D'D + B_2'PB_2)^{-1}(B_2'PA + D'C) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

e $K = -(D'D + B_2'PB_2)^{-1}(B_2'PA + D'C)$ garante $\|H(z)\|_\infty < \gamma$

- Para obter o ganho ótimo, reduzir iterativamente γ até o mínimo valor tal que existe $P = P' > 0$ solução da equação de Riccati

Controle Ótimo $\mathscr{H}_\infty$ — Solução LMI

Lema 16

O sistema (7)-(8) *é estabilizável por realimentação de estados se e somente se existir uma solução para o problema convexo de otimização*

$$\min_{Z,\,W=W'>0} \quad \mu$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} W & AW+B_2Z & \mathbf{0} & B_1 \\ WA'+Z'B_2' & W & WC'+Z'D' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & CW+DZ & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ B_1' & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mu\mathbf{I} \end{bmatrix} > 0$$

Na solução ótima, $K = ZW^{-1}$ *assegura* $\|H(z)\|_\infty = \mu$

Resultado equivalente (Finsler)

Lema 17

O sistema (7)-(8) *é estabilizável por realimentação de estados se e somente se existir uma solução para o problema convexo de otimização*

$$\min_{Z,G,W=W'>0} \quad \mu$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} W & AG+B_2Z & \mathbf{0} & B_1 \\ GA'+Z'B_2' & G+G'-W & G'C'+Z'D' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & CG+DZ & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ B_1' & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mu\mathbf{I} \end{bmatrix} > 0$$

Na solução ótima, $K = ZG^{-1}$ *assegura* $\|H(z)\|_\infty = \mu$

- Fazendo $G = G' = W$, recai-se no caso anterior

Comentários — $\mathscr{H}_2$

- A solução por meio da equação de Riccati é mais simples computacionalmente (decomposição de valores singulares do hamiltoneano associado) do que a solução por LMIs (método numérico)
- A expressão do ganho obtido por meio da equação de Riccati depende das matrizes do sistema; na solução por LMIs, só depende de variáveis de otimização
- A extensão para cômputo de controle robusto por realimentação de estados para sistemas lineares incertos com incerteza politópica é imediata na solução por LMIs
- O tratamento de restrições de estrutura na solução de Riccati requer que a matriz de controle B_2 seja bloco-diagonal; no caso das LMIs, pode ser imposta diretamente nas matrizes Z e W (ou nas matrizes Z e G, sem restringir a matriz de Lyapunov W, com vantagens)

Comentários — $\mathscr{H}_\infty$

- O cômputo da realimentação de estado que minimiza a norma $\mathscr{H}_\infty$ exige um procedimento numérico, seja pela da resolução iterativa (para valores de γ cada vez menores) da equação modificada de Riccati ou então por meio de um procedimento convexo de otimização formulado em termos de LMIs.
- Em sistemas com um bloco D_1 (termo de transmissão direta entre o ruído w e a saída y) o cômputo do ganho ótimo de Riccati é um pouco mais complexo, enquanto que no caso de LMIs a extensão para tratar esse caso é imediata.
- Como no caso $\mathscr{H}_2$, a expressão do ganho obtido a partir de Riccati depende das matrizes do sistema, dificultando o tratamento de sistemas incertos e de restrições de estrutura sobre o ganho K.
- Os resultados obtidos a partir de LMIs podem ser imediatamente estendidos para tratar incertezas na forma politópica.

Restrições de estrutura

- **Controle Descentralizado**

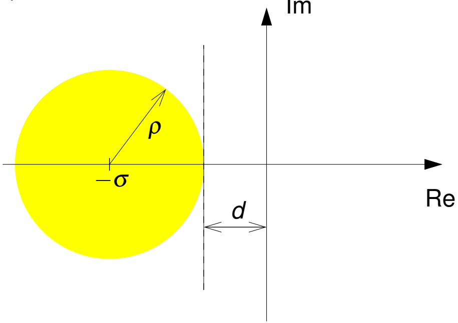
Um ganho $K_D = \text{bloco-diag}\{K_1, \ldots, K_M\}$ é obtido se existir solução para o Lema 8.7 com a restrição de estrutura

$$Z = \text{bloco-diag}\{Z_1, \ldots, Z_M\} \quad , \quad G = \text{bloco-diag}\{G_1, \ldots, G_M\}$$

- Estrutura similar poderia ser imposta às matrizes dos demais lemas

Alocação em um círculo deslocado

- O cômputo do ganho de realimentação de estado do caso discreto pode ser modificado para a alocação dos pólos em círculos em qualquer local do plano complexo. Por exemplo, existe K que aloca os pólos de $(A+BK)$ no círculo de raio ρ centrado em $(-\sigma, 0)$, distante d do eixo imaginário



se e somente se

$$\left|\lambda_i\left\{\frac{A+BK+\sigma\mathbf{I}}{\rho}\right\}\right| < 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \exists W = W' > 0 \; : \; (A+BK+\sigma\mathbf{I})W(A+BK+\sigma\mathbf{I})' - \rho^2 W < 0$$

Condição LMI

Lema 18

Existe K que aloca os autovalores de $(A+BK)$ no interior do círculo de raio ρ centrado em $(-\sigma,0)$ se e somente se existirem matrizes $W = W' \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $G \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $Z \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tais que

$$\begin{bmatrix} \rho^2 W & AG+BZ+\sigma G \\ G'A'+Z'B'+\sigma G' & G+G'-W \end{bmatrix} > 0$$

No caso afirmativo, o ganho é dado por $K = ZG^{-1}$

Prova: Com $K = ZG^{-1}$ tem-se a condição equivalente ($\mathrm{He}(X) = X + X'$)

$$\begin{bmatrix} \rho \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & -W \end{bmatrix} + \mathrm{He}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ G' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (A+BK+\sigma\mathbf{I})'/\rho & I \end{bmatrix} \right) \right) \begin{bmatrix} \rho \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0$$

$$\iff \quad \frac{(A+BK+\sigma\mathbf{I})}{\rho} W \frac{(A+BK+\sigma\mathbf{I})'}{\rho} - W < 0$$

que garante a localização dos autovalores no círculo especificado.

- Resultado equivente é obtido com a escolha $G = G' = W$

Controle Robusto por Realimentação de Estado

Considere o sistema linear incerto contínuo

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u(t) \quad ; \quad (A,B)(\alpha) \in \mathscr{D}$$

$$\mathscr{D} = \left\{ (A,B)(\alpha) : \sum_{i=1}^{N} \alpha_i (A,B)_i \; ; \; \alpha \in \Lambda \right\}, \quad \Lambda = \left\{ \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1 \; ; \; \alpha_i \geq 0 \right\}$$

Problema

Determinar uma matriz $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que a lei de controle linear $u(t) = Kx(t)$ estabilize assintoticamente o sistema em malha fechada $\forall (A,B)(\alpha) \in \mathscr{D}$

- Soluções:
  - baseadas na estabilidade quadrática $P(\alpha) = P$
  - baseadas em matrizes de Lyapunov afins

$$P(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i P_i \; ; \; \alpha \in \Lambda$$

Síntese por meio da estabilidade quadrática

Lema 19

Se existirem $W \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $Z \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tais que

$$W > 0 \quad ; \quad A_iW + WA_i' + B_iZ + Z'B_i' < 0 \;\; ; \;\; i = 1,\ldots,N$$

então $K = ZW^{-1}$ assegura a estabilidade quadrática do sistema em malha fechada $\forall (A,B)(\alpha) \in \mathscr{D}$.

Prova: Multiplicando por α_i e somando de 1 a N, tem-se

$$\Big(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i A_i\Big) W + W\Big(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i A_i\Big)' + \Big(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i B_i\Big) Z + Z'\Big(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i B_i\Big)' < 0$$

que pode ser reescrito

$$\big(A(\alpha) + B(\alpha)ZW^{-1}\big)W + W\big(A(\alpha) + B(\alpha)ZW^{-1}\big)' < 0$$

e, com $K = ZW^{-1}$, tem-se

$$\big(A(\alpha) + B(\alpha)K\big)W + W\big(A(\alpha) + B(\alpha)K\big)' < 0\,, \quad \forall (A,B)(\alpha) \in \mathscr{D}$$

Estabilidade quadrática e Lema de Finsler

- O Lema de Finsler pode ser usado de maneira ligeiramente diferente para o cômputo de um ganho robusto de realimentação de estados baseado na estabilidade quadrática, a partir da equivalência (para i qualquer):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ A_i' \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} B_iZ + Z'B_i' & W \\ W & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ A_i' \end{bmatrix} = A_iW + WA_i' + B_iZ + Z'B_i' < 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} B_iZ + Z'B_i' & W \\ W & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_i' & -\mathbf{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_i \\ -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1' & X_2' \end{bmatrix} < 0$$

Síntese por meio da estabilidade quadrática com Finsler

Lema 20

Se existirem uma matriz simétrica definida positiva $W \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Z \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $X_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $X_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que

$$\begin{bmatrix} B_iZ + Z'B_i' + X_1A_i' + A_iX_1' & W - X_1 + A_i'X_2' \\ W - X_1' + X_2A_i & -X_2 - X_2' \end{bmatrix} < 0 \quad , \quad i = 1,\ldots,N$$

então $K = ZW^{-1}$ assegura a estabilidade quadrática do sistema em malha fechada $\forall (A,B)(\alpha) \in \mathscr{D}$.

A prova é semelhante às anteriores.

Estabilidade quadrática: caso discreto

- A estabilizabilidade do par incerto $\forall(A,B)(\alpha) \in \mathscr{D}$ pode ser testada por extensões diretas dos lemas apresentados (nos casos em que (A,B) aparecem de maneira linear nas LMIs)

Lema 21

Se existirem $W \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $Z \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tais que

$$\begin{bmatrix} W & WA_i' + Z'B_i' \\ A_iW + B_iZ & W \end{bmatrix} > 0 \ ; \ \ i = 1,\ldots,N$$

então $K = ZW^{-1}$ assegura a estabilidade quadrática em malha fechada do sistema discreto $\forall(A,B)(\alpha) \in \mathscr{D}$.

Estabilidade quadrática: caso discreto com variáveis extras

Lema 22

Se existirem $W = W' \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $G \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *e* $Z \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *tais que*

$$\begin{bmatrix} W & G'A_i' + Z'B_i' \\ A_iG + B_iZ & G + G' - W \end{bmatrix} > 0 \;\; ; \;\; i = 1, \ldots, N$$

então $K = ZG^{-1}$ *assegura a estabilidade quadrática em malha fechada do sistema discreto* $\forall (A, B)(\alpha) \in \mathscr{D}$.

Estabilidade quadrática: caso discreto com Finsler modificado

- Também no caso discreto, Lema de Finsler pode ser usado de maneira ligeiramente diferente para o cômputo de um ganho robusto de realimentação de estados baseado na estabilidade quadrática, a partir da equivalência (para i qualquer):

$$
\begin{aligned}
0 > \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ A_i' \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} Y_i - W & B_i Z \\ Z' B_i' & W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ A_i' \end{bmatrix} &= Y_i - W + A_i Z' B_i' + B_i Z A_i' + A_i W A_i' \\
&\geq B_i Z W^{-1} Z' B_i' - W + A_i Z' B_i' + B_i Z A_i' + A_i W A_i' \\
&= \left(A_i + B_i Z W^{-1}\right) W \left(A_i + B_i Z W^{-1}\right)' - W
\end{aligned}
$$

$$\Updownarrow$$

$$
\begin{bmatrix} Y_i - W & B_i Z \\ Z' B_i' & W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_i' & -\mathbf{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_i \\ -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1' & X_2' \end{bmatrix} < 0 \ ,
$$

$$
\begin{bmatrix} Y_i & B_i Z \\ Z' B_i' & W \end{bmatrix} \geq 0 \iff Y_i \geq B_i Z W^{-1} Z' B_i'
$$

Estabilidade quadrática: caso discreto com Finsler modificado

Lema 23

Se existirem uma matriz simétrica definida positiva $W \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Z \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $X_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $X_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e matrizes simétricas $Y_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, tais que

$$\begin{bmatrix} Y_i - W + X_1 A_i' + A_i X_1' & B_i Z - X_1 + A_i X_2' \\ Z' B_i' - X_1' + X_2 A_i & -X_2 - X_2' \end{bmatrix} < 0 \, , \; \begin{bmatrix} Y_i & B_i Z \\ Z' B_i' & W \end{bmatrix} \geq 0 \; ; \; i = 1, \ldots, N$$

então $K = ZW^{-1}$ assegura a estabilidade quadrática em malha fechada do sistema discreto $\forall (A,B)(\alpha) \in \mathscr{D}$.

A prova é semelhante às anteriores.

Caso contínuo com matriz de Lyapunov afim (projeção)

Lema 24

Se existirem matrizes simétricas $P_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $i = 1,\dots,N$, matrizes $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $Z \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tais que

$$\begin{bmatrix} -V-V' & V'A_i'+Z'B_i'+P_i & V' \\ A_iV+B_iZ+P_i & -P_i & \mathbf{0} \\ V & \mathbf{0} & -P_i \end{bmatrix} < 0 \ , \quad i = 1,\dots,N$$

então $K = ZV^{-1}$ assegura a estabilidade robusta em malha fechada do sistema contínuo $\forall (A,B)(\alpha) \in \mathscr{D}$ com a função de Lyapunov baseada na matriz $P(\alpha) = \sum_i \alpha_i P_i$, $\alpha \in \Lambda$.

Prova: Multiplicando por α_i, somando de $i = 1$ até N e fazendo $K = ZV^{-1}$ tem-se

$$\begin{bmatrix} -V-V' & V'(A(\alpha)+B(\alpha)K)'+P(\alpha) & V' \\ (A(\alpha)+B(\alpha)K)V+P(\alpha) & -P(\alpha) & \mathbf{0} \\ V & \mathbf{0} & -P(\alpha) \end{bmatrix} < 0$$

e o resto da prova segue do Lema da Projeção Recíproca.

Caso contínuo com matriz de Lyapunov afim (Finsler)

Lema 25

Se existirem matrizes simétricas definidas positivas $W_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $i=1,\dots,N$, matrizes $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Z \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e um $\xi > 0$ tais que

$$\begin{bmatrix} A_iX + X'A_i' + B_iZ + Z'B_i' & W_i - X' + \xi A_iX + \xi B_iZ \\ W_i - X + \xi X'A_i' + \xi Z'B_i' & -\xi X - \xi X' \end{bmatrix} < 0 \;, \quad i = 1,\dots,N$$

então $K = ZX^{-1}$ assegura a estabilidade robusta em malha fechada do sistema contínuo $\forall (A,B)(\alpha) \in \mathscr{D}$ com a função de Lyapunov $W(\alpha) = \sum_i \alpha_i W_i$, $\alpha \in \Lambda$.

Prova: Multiplicando por α_i, somando de $i=1$ até N e fazendo $K = ZX^{-1}$ tem-se

$$\begin{bmatrix} (A(\alpha)+B(\alpha)K)X + X'(A(\alpha)+B(\alpha)K)' & W(\alpha) - X' + \xi(A(\alpha)+B(\alpha)K)X \\ W(\alpha) - X + \xi X'(A(\alpha)+B(\alpha)K)' & -\xi X - \xi X' \end{bmatrix} < 0$$

e o resto da prova segue do Lema 5.

Caso discreto com matriz de Lyapunov afim (Finsler)

Lema 26

Se existirem matrizes simétricas $W_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $i = 1,\ldots,N$, $G \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $Z \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tais que

$$\begin{bmatrix} W_i & G'A_i' + Z'B_i' \\ A_iG + B_iZ & G + G' - W_i \end{bmatrix} > 0 \;\; ; \;\; i = 1,\ldots,N$$

então $K = ZG^{-1}$ assegura a estabilidade robusta em malha fechada do sistema discreto $\forall (A,B)(\alpha) \in \mathscr{D}$ com a função de Lyapunov $W(\alpha) = \sum_i \alpha_i W_i$, $\alpha \in \Lambda$.

A prova é semelhante às anteriores.

Caso discreto com matriz de Lyapunov afim e parâmetro ξ

Lema 27

Se existirem matrizes simétricas $W_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $i = 1,\ldots,N$, $G \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Z \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $\xi \in (-1,1)$ tais que

$$\begin{bmatrix} \xi A_i G + \xi G' A_i' + \xi B_i Z + \xi Z' B_i' - W_i & A_i G + B_i Z - \xi G' \\ G' A_i' + Z' B_i' - \xi G & W_i - G - G' \end{bmatrix} < 0 \quad ; \quad i = 1,\ldots,N$$

então $K = ZG^{-1}$ assegura a estabilidade robusta em malha fechada do sistema discreto $\forall (A,B)(\alpha) \in \mathscr{D}$ com a função de Lyapunov $W(\alpha) = \sum_i \alpha_i W_i$, $\alpha \in \Lambda$.

A prova é semelhante às anteriores. A busca em $\xi \in (-1,1)$ pode produzir soluções factíveis em casos nos quais a escolha $\xi = 0$ (condição do Lema 26) falhou.

Controle Robusto com Custo Garantido $\mathscr{H}_2$

Seja o sistema linear

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\alpha)x(t) + B_2(\alpha)u(t) + B_1(\alpha)w(t) && (9) \\ y(t) &= C(\alpha)x(t) + D(\alpha)u(t) && (10) \end{aligned}$$

- Sistema Incerto $(A, B_1, B_2, C, D) \in \mathscr{D}$

$$\mathscr{D} = \left\{ (A, B_1, B_2, C, D)(\alpha) : \sum_{i=1}^{N} \alpha_i (A, B_1, B_2, C, D)_i \; ; \; \alpha \in \Lambda \right\}$$

Problema: Determinar $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que $u(t) = Kx(t)$ estabilize assintoticamente e minimize um limitante do custo garantido $\mathscr{H}_2$ do sistema em malha fechada $\forall (A, B_1, B_2, C, D) \in \mathscr{D}$

- soluções baseadas na estabilidade quadrática $P(\alpha) = P$
- soluções baseadas em $P(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i P_i$, $\alpha \in \Lambda$

Controle Custo Garantido $\mathscr{H}_2$ — Caso Contínuo

Lema 28

O sistema (9)-(10) *é estabilizável por realimentação de estados se existir uma solução para o problema convexo de otimização*

$$\min_{X=X',Z,W=W'>0} \quad \mathbf{Tr}(X)$$

$$\begin{bmatrix} X & C_iW+D_iZ \\ WC_i'+Z'D_i' & W \end{bmatrix} \geq 0 \;\; ; \;\; i=1,\dots,N$$

$$\begin{bmatrix} A_iW+B_{2i}Z+WA_i'+Z'B_{2i}' & B_{1i} \\ B_{1i}' & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \leq 0 \;\; ; \;\; i=1,\dots,N$$

- $\rho^2 = \mathbf{Tr}(X)$, $K = ZW^{-1}$ *é tal que* $\|H(s)\|_2 \leq \rho$, $\forall (A,B_1,B_2,C,D) \in \mathscr{D}$

Controle Custo Garantido $\mathscr{H}_2$ — Caso Discreto

$$
\begin{aligned}
x(k+1) &= A(\alpha)x(k) + B_2(\alpha)u(k) + B_1(\alpha)w(k) \qquad (11)\\
y(k) &= C(\alpha)x(k) + D(\alpha)u(k) \qquad (12)
\end{aligned}
$$

Lema 29

O sistema (11)-(12) *é estabilizável por realimentação de estados se existir uma solução para o problema convexo de otimização*

$$
\min_{X=X',Z,W=W'>0} \quad \mathbf{Tr}(X)
$$

sujeito a

$$
\begin{bmatrix} X & C_iW + D_iZ \\ WC_i' + Z'D_i' & W \end{bmatrix} \geq 0 \;\; ; \;\; \begin{bmatrix} W & A_iW + B_{2i}Z & B_{1i} \\ WA_i' + Z'B_{2i} & W & \mathbf{0} \\ B_{1i}' & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \geq 0
$$

$$
i = 1, \ldots, N
$$

- $\rho^2 = \mathbf{Tr}(X)$, $K = ZW^{-1}$ *é tal que* $\|H(z)\|_2 \leq \rho$, $\forall (A, B_1, B_2, C, D) \in \mathscr{D}$

Resultado mais abrangente (contém o anterior)

Lema 30

O sistema (11)-(12) *é estabilizável por realimentação de estados se existir uma solução para o problema convexo de otimização*

$$\min_{X=X', G, Z, W_i = W_i' > 0, i=1,\ldots,N} \mathbf{Tr}(X)$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} X & C_iG + D_iZ \\ G'C_i' + Z'D_i' & G + G' - W_i \end{bmatrix} \geq 0 \;\; ; \;\; i = 1,\ldots,N$$

$$\begin{bmatrix} W_i & A_iG + B_{2i}Z & B_{1i} \\ G'A_i' + Z'B_{2i}' & G + G' - W_i & \mathbf{0} \\ B_{1i}' & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \geq 0 \;\; ; \;\; i = 1,\ldots,N$$

- $\rho^2 = \mathbf{Tr}(X)$, $K = ZG^{-1}$ *é tal que* $\|H(z)\|_2 \leq \rho$, $\forall (A, B_1, B_2, C, D) \in \mathscr{D}$

- $W(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i W_i$, $\alpha \in \Lambda$, assegura o custo garantido $\mathscr{H}_2$

Controle Custo Garantido $\mathscr{H}_\infty$ — Caso Contínuo

Seja o sistema linear

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + B_2(\alpha)u(t) + B_1(\alpha)w(t) \quad (13)$$
$$y(t) = C(\alpha)x(t) + D_2(\alpha)u(t) + D_1(\alpha)w(t) \quad (14)$$

- Sistema Incerto $(A, B_1, B_2, C, D_1, D_2) \in \mathscr{D}$

$$\mathscr{D} = \left\{ (A, B_1, B_2, C, D_1, D_2)(\alpha) : \sum_{i=1}^{N} \alpha_i (A, B_1, B_2, C, D_1, D_2)_i; \ \alpha \in \Lambda \right\}$$

Problema: Determinar $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que $u(t) = Kx(t)$ estabilize assintoticamente e minimize um limitante do custo garantido $\mathscr{H}_\infty$ do sistema em malha fechada $\forall (A, B_1, B_2, C, D_1, D_2) \in \mathscr{D}$

- soluções baseadas na estabilidade quadrática $P(\alpha) = P$
- soluções baseadas em $P(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i P_i$, $\alpha \in \Lambda$

Controle Custo Garantido $\mathscr{H}_\infty$ — Caso Contínuo

Lema 31

O sistema (13)-(14) *é estabilizável por realimentação de estados se existir uma solução para o problema convexo de otimização*

$$\min_{Z,\, W = W' > 0} \quad \mu$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} A_i W + W A_i' + B_{2i} Z + Z' B_{2i}' & W C_i' + Z' D_{2i}' & B_{1i} \\ C_i W + D_{2i} Z & -\mathbf{I} & D_{1i} \\ B_{1i}' & D_{1i}' & -\mu \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \;\; ; \;\; i = 1, \ldots, N$$

- $K = Z W^{-1}$ *assegura* $\|H(s)\|_\infty \leq \sqrt{\mu}$, $\forall (A, B_1, B_2, C, D_1, D_2) \in \mathscr{D}$

Controle Custo Garantido $\mathscr{H}_\infty$ — Caso Discreto

Seja o sistema linear

$$
\begin{aligned}
x(k+1) &= A(\alpha)x(k) + B_2(\alpha)u(k) + B_1(\alpha)w(k) && (15)\\
y(k) &= C(\alpha)x(k) + D_2(\alpha)u(k) + D_1(\alpha)w(k) && (16)
\end{aligned}
$$

Lema 32

O sistema (15)-(16) *é estabilizável por realimentação de estados se existir uma solução para o problema convexo de otimização*

$$
\min_{Z,\, W = W' > 0} \quad \mu
$$

sujeito a

$$
\begin{bmatrix}
W & A_i W + B_{2i} Z & \mathbf{0} & B_{1i} \\
WA_i' + Z' B_{2i}' & W & WC_i' + Z' D_{2i}' & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & C_i W + D_{2i} Z & \mathbf{I} & D_{1i} \\
B_{1i}' & \mathbf{0} & D_{1i}' & \mu \mathbf{I}
\end{bmatrix} > 0 \;\; ; \;\; i = 1, \ldots, N
$$

- $K = ZW^{-1}$ *assegura* $\|H(z)\|_\infty \leq \sqrt{\mu},\ \forall (A, B_1, B_2, C, D_1, D_2) \in \mathscr{D}$

Resultado mais abrangente (contém o anterior)

Lema 33

O sistema (15)-(16) *é estabilizável por realimentação de estados se existir uma solução para o problema convexo de otimização*

$$\min_{Z,G,W_i=W_i'>0,\, i=1,\ldots,N} \mu$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} W_i & A_iG+B_{2i}Z & \mathbf{0} & B_{1i} \\ G'A_i'+Z'B_{2i}' & G+G'-W_i & G'C_i'+Z'D_{2i}' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C_iG+D_{2i}Z & \mathbf{I} & D_{1i} \\ B_{1i}' & \mathbf{0} & D_{1i}' & \mu\mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \ ; \ \ i=1,\ldots,N$$

- $K = ZG^{-1}$ *assegura* $\|H(z)\|_\infty \leq \sqrt{\mu}$, $\forall (A,B_1,B_2,C,D_1,D_2) \in \mathscr{D}$

- $W(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i W_i$, $\alpha \in \Lambda$, assegura o custo garantido $\mathscr{H}_\infty$

Comentários Finais

Extensões

- A partir dos lemas apresentados, extensões para tratar outros problemas podem ser obtidas, por exemplo, com restrições de estrutura (descentralização), de alocação de pólos e outras;
- De maneira geral, os resultados baseados na estabilidade quadrática são mais conservadores do que os resultados certificados por funções de Lyapunov afins;
- Condições para o cômputo de realimentação de estado escalonada (*gain-scheduling*) para sistemas variantes no tempo, baseadas em estabilidade quadrática, podem ser obtidas das condições apresentadas fazendo-se $K(\alpha) = Z(\alpha)W^{-1}$.