IA892 – Análise e Controle de Sistemas Lineares por Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs)

Trabalho Computacional — Segundo Semestre 2015

O objetivo deste trabalho é avaliar a condição de estabilização robusta para sistemas politópicos invariantes no tempo baseada em dois estágios. Seja o sistema linear politópico

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u(t) \tag{1}$$
$$y = C(\alpha)x \tag{2}$$

sendo $x \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estados, $u \in \mathbb{R}^m$ a entrada de controle e $y \in \mathbb{R}^p$ a saída medida. As matrizes dinâmica, de entrada e de saída do sistema são politópicas, isto é

$$A(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i A_i, \quad B(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i B_i, \quad C(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i C_i, \quad \alpha \in \Lambda_N$$

sendo Λ_N o simplex unitário. Duas leis de controle robusto serão investigadas

1. Realimentação de estados: $u(t) = Kx(t)$
2. Realimentação estática de saída: $u(t) = Ky(t)$

O segundo estágio é baseado no seguinte teorema.

Teorema 1 *Dado um ganho $K(\alpha) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ na forma afim tal que $A(\alpha) + B(\alpha)K(\alpha)$ é assintoticamente estável, existe um ganho robusto estabilizante de realimentação de saída K_s tal que $A(\alpha) + B(\alpha)K_sC(\alpha)$ é assintoticamente estável se existirem matrizes $0 < P(\alpha) = P(\alpha)' \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $F(\alpha) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $G(\alpha) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $H \in \mathbb{R}^{m\times m}$ e $J \in \mathbb{R}^{m\times p}$ tais que*

$$\begin{bmatrix} He\,(A(\alpha)'F(\alpha) + K(\alpha)'B(\alpha)'F(\alpha)) & \star & \star \\ P(\alpha) - F(\alpha) + G(\alpha)'A(\alpha) + G(\alpha)'B(\alpha)K(\alpha) & -G(\alpha) - G(\alpha)' & \star \\ B(\alpha)'F(\alpha) + JC(\alpha) - HK(\alpha) & B(\alpha)'G(\alpha) & -H - H' \end{bmatrix} < 0, \tag{3}$$

para todo $\alpha \in \Lambda_N$, com $\mathrm{He}\,(X) = X + X'$. No caso afirmativo, o ganho robusto de realimentação é dado por $K_s = H^{-1}J$.

Note que as condições do teorema podem ser facilmente adaptadas para computar um ganho de realimentação de estados robusto. Basta considerar $C(\alpha) = \mathrm{I}_n$ e $J \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

1^a etapa

A primeira parte do trabalho consiste em fornecer LMIs programáveis para o Teorema 1. Considerando estruturas afins (polinomiais de grau um) para todas as variáveis de otimização que dependem de α, construa uma `function` em matlab contendo uma relaxação para as LMIs dependentes de parâmetros do Teorema 1. Essa função deverá ter a seguinte estrutura:

```
function output = segundoEstagio_RA(A,B,C,K)
```

em que A, B e C são as matrizes do sistema fornecidas em estruturas celulares e K é o ganho de realimentação de estados polinomial de grau um, também fornecido na estrutura celular. A variável de saída deverá ter pelo menos dois campos

```
output.feas
output.Ks
```

em que `output.feas` indica factibilidade ou não, e `output.Ks` é o ganho estabilizante (caso tenha sido encontrado).

Com relação à relaxação, perceba que o lado esquerdo de (3) possui termos constantes, afins, quadráticos e cúbicos. Desse modo, todos os termos precisarão ser homogenizados para grau 3. No curso foram oferecidas relaxações que tratam termos constantes, afins e quadráticos. O tratamento de termos cúbicos pode ser encontrado em [RP01]. Os artigos [dOOL+04b, dOOL+04a] também podem ser úteis.

Também serão aceitos programas elaborados com a ajuda do Robust LMI Parser[1] (ROLMIP).

Benchmark

Para avaliar se a relaxação foi programada corretamente, o seguinte programa *benchmark* deverá ser executado.

```
% Matrizes do sistema
A{1} = [-1 0;0 0];
A{2} = [-1 -1;-1 -1];
A{3} = [0 -1;0 0];
B{1} = [-2;1];
B{2} = [-3;3;];
B{3} = [-3;2];
C{1} = eye(2);
C{2} = eye(2);
C{3} = eye(2);
% Ganho do primeiro estágio K(alpha)=a_1K_1 + a_2K_2 + a_3K_3, a_1+a_2+a_3=1;
K{1} = [0.008 -0.317];
K{2} = [0.172 -0.205];
K{3} = [0.282 -0.366];

inc = 1;
uFeas = 0;
% O maior valor de u será calculado com 4 casas decimais de precisão
for c=0:4
```

[1] http://www.dt.fee.unicamp.br/~agulhari/rolmip/rolmip.htm

```
    for u=uFeas:inc:10
        % Calcula a matriz A modificada (A + u*I)
        for k=1:3
            Au{k} = A{k}+u*eye(2);
        end
        % Teste do segundo estágio
        SOF = segundoEstagio_RA(Au,B,C,K);
        fprintf('u=%.5f -> %d\n',u,SOF.feas);
        if SOF.feas == 0
            break;
        else
            uFeas = u;
        end
    end
    % Diminue o incremento em 10 vezes
    inc = inc/10;
end
fprintf('valor máximo de u = %.5f\n',uFeas);
```

Avaliação e entrega

A rotina programada deverá ser entregue até o dia 7 de dezembro (quanto antes melhor). Deverá ser enviada por email com o campo "assunto" na seguinte forma: IA982 - etapa 1 - RA. O valor de u fornecido pelo programa *benchmark* deverá ser fornecido no corpo do email. A nota será composta da seguinte forma:

1. 85% será em função da programação correta da relaxação. Ou seja, se o valor de u fornecido pelo *benchmark* estiver correto.

2. 15% será em função da apresentação, que nesta primeira etapa consiste na legibilidade (identação e comentários) do código fonte do programa.

2^a etapa

A segunda etapa do trabalho consiste em programar uma condição para o primeiro estágio e testar a eficácia do método baseado em dois estágios. A condição de síntese resultante será aplicada em uma base de dados de sistemas politópicos instáveis que garantidamente admitem um ganho robusto estabilizante por realimentação de estados, mas que não são quadraticamente estabilizáveis. Ou seja, esses sistemas são "difíceis" de serem estabilizados. A base contém 100 sistemas para cada cada combinação de $n = 2, \ldots, 5$, $N = 2, \ldots, 5$ e $m = 1$. Tanto realimentação de estados quanto realimentação de saída serão investigadas.

Base de dados

A base de dados está disponível para download no link:

`http://www.dt.fee.unicamp.br/~ricfow/programs/ssf_database.zip`

O seguinte código pode ser utilizado para ler a base de dados:

```
load DB_ssf_nonQS_100_c;
inputs=1;
for SOF=0:1
    for order=2:5
        for vertices=2:5
            for i=1:100
                A = BASE{order,inputs,vertices,i}.A;
                B = BASE{order,inputs,vertices,i}.B;
                if SOF == 1
                    for k=1:vertices
                        C{k} = BASE{order,inputs,vertices,i}.K;
                    end
                    %Aplique a realimentação de saída aqui (1º e 2º estágios)
                else
                    for k=1:vertices
                        C{k} = eye(ordem)
                    end
                    %Aplique a realimentação de estados aqui (1º e 2º estágios)
                end

            end
            fprintf('Terminado (n,m,N) = (%d,%d,%d)\n',order,inputs,vertices);
        end
    end
end
```

Como pode ser observado no código, o caso de realimentação de saída será testado considerando-se a matriz de saída $C(\alpha)$ como constante e igual a K, que é um ganho robusto por realimentação de estados estabilizante (disponível na base). Assim, por exemplo, $L = 1$ sempre será um ganho por realimentação de saída estabilizante no caso de uma entrada ($m = 1$).

Métodos para o primeiro estágio

Para aumentar a família de ganhos estabilizantes do primeiro estágio, será considerado um ganho por realimentação de estados dependente de parâmetros na forma afim (polinomial de grau 1), isto é,

$$K(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i K_i = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i Z_i G^{-1}$$

As condições a serem utilizadas não são apresentadas para fornecer o ganho nessa forma, requerendo ajustes. Em geral o que precisa ser feito é considerar a matriz Z como polinomial de grau 1 ($Z(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i Z_i$), gerando a necessidade de tratar produtos de duas matrizes na forma afim. As relaxações vistas na aula 5 (Relaxações LMIs) podem ser aplicadas. Os métodos a serem adaptados e programados são apresentados a seguir. Detalhes de implementação também são fornecidos sempre que necessário. Dúvidas devem ser enviadas ao professor por email o mais rápido possível.

1. Lema 25 da Aula 8. O parâmetro escalar deve ser buscado no conjunto (13 valores)

$$\{10^{-6}, 10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}, 1, 10^{1}, 10^{2}, 10^{3}, 10^{4}, 10^{5}, 10^{6}\} \tag{4}$$

   Note que a condição deve testar todos os valores do conjunto, parando somente se o segundo estágio fornecer uma solução factível.

2. Lema 24 da Aula 8. Essa condição também é apresentada em [ATB01].

3. Condição de controle $\mathcal{H}_2$ baseada no seguinte teorema: Se existirem uma matriz $Y(\alpha) = Y(\alpha)' \in \mathcal{R}^{n\times n}$, matrizes $L(\alpha) \in \mathcal{R}^{m\times n}$, $F \in \mathcal{R}^{n\times n}$, $M \in \mathcal{R}^{r\times r}$ e um escalar λ dado tais que as seguintes LMIs robustas são verificadas para todo $\alpha \in \Lambda_N$

$$\begin{bmatrix} M & B_1(\alpha)' \\ \star & Y(\alpha) \end{bmatrix} > 0, \quad \begin{bmatrix} -2\epsilon Y(\alpha) & 0_{n\times p} & Y(\alpha) + (A(\alpha) + \epsilon \mathrm{I})F + B(\alpha)L(\alpha) \\ \star & -\mathrm{I}_p & C_1(\alpha)F + D_2(\alpha)L(\alpha) \\ \star & \star & -F - F' \end{bmatrix} < 0,$$

   $\mathrm{Tr}(M) < \lambda$, então $K = L(\alpha)F^{-1}$ é um ganho estabilizante por realimentação de estados. A variável λ deve ser minimizada como função objetivo. O escalar ϵ deve ser buscado no conjunto dado em (4). Deverão ser usadas as seguintes matrizes extras: $B_1(\alpha) = 0.1\mathrm{I}_n$, $C_1(\alpha) = [1 \ 0_{1\times n-1}]$, $D_2(\alpha) = 0$. A dimensão p é o número de linhas da matriz $C_1(\alpha)$.

4. Condição apresentada em [OdOP11, Lemma 5]. O parâmetro escalar deve ser buscado no conjunto dado em (4).

5. Condição apresentada em [VOP15, Theorem 1]. Os parâmetros escalares devem ser testados de acordo com a equação (10) do artigo (total de 16 buscas).

6. Condição de controle $\mathcal{H}_\infty$ baseada na condição: [Xie08, Theorem 4.1]. O valor de γ deve ser minimizado e o escalar r deve ser buscado no conjunto dado em (4). Deverão ser usadas as seguintes matrizes extras: $B_{1i} = 0.1\mathrm{I}_n$, $C_i = [1 \ 0_{1\times n-1}]$, $D_{1i} = 0_{1\times n}$, $D_{2i} = 0$. Observação: as matrizes C_i usadas nesta condição não têm relação com a matriz $C(\alpha)$ da base de dados, que deve ser usada apenas no segundo estágio.

7. Condição apresentada em [ROC15, Theorem 4]. O parâmetros escalar ξ deve ser buscado no conjunto $\{-0.90, -0.54, -0.18, 0.18, 0.54, 0.90\}$ e o parâmetro escalar ϵ deve ser buscado no conjunto $\{0.1, 1\}$ (total de $2 \times 6 = 12$ buscas).

8. Condição baseada no seguinte teorema: Se existirem uma matriz $0 < X(\alpha) = X(\alpha)' \in \mathcal{R}^{n\times n}$ matrizes $Y(\alpha) \in \mathcal{R}^{m\times n}$ e $G \in \mathcal{R}^{n\times n}$ e um escalar ϵ dado tais que as seguintes LMIs robustas são verificadas para todo $\alpha \in \Lambda_N$

$$\begin{bmatrix} He\left(A(\alpha)X(\alpha) + B(\alpha)Y(\alpha)\right) & \star \\ Y(\alpha)'B(\alpha)' - G + \epsilon X(\alpha) & -G - G' \end{bmatrix} < 0,$$

   então $K = \epsilon Y(\alpha)G^{-1}$ é um ganho estabilizante por realimentação de estados. Essa condição é uma extensão da condição apresentada em [OdOP11, Lemma 9]. O escalar ϵ deve ser buscado no conjunto dado em (4). Atenção ao fato de que o escalar ϵ aparece no ganho K.

9. Condição de controle $\mathcal{H}_\infty$ baseada na condição: [HWS05, Theorem 3]. O valor de γ deve ser minimizado e o escalar λ deve ser buscado no conjunto dado em (4). Deverão ser usadas as seguintes matrizes extras: $B_{wi} = 0.1\mathrm{I}_n$, $C_i = [1 \ 0_{1\times n-1}]$, $D_{wi} = 0_{1\times n}$, $D_i = 0$. As matrizes C_i usadas nesta condição não têm relação com a matriz $C(\alpha)$ da base de dados, que deve ser usada apenas no segundo estágio.

10. Condição baseada no seguinte teorema: Se existirem uma matriz $Y(\alpha) = Y(\alpha)' \in \mathcal{R}^{n\times n}$ matrizes $L(\alpha) \in \mathcal{R}^{m\times n}$ e $F \in \mathcal{R}^{n\times n}$ e um escalar ϵ dado tais que as seguintes LMIs robustas são verificadas para todo $\alpha \in \Lambda_N$

$$\begin{bmatrix} -2\epsilon Y(\alpha) & Y(\alpha) + (A(\alpha) + \epsilon \mathrm{I})F + B(\alpha)L(\alpha) \\ \star & -F - F' \end{bmatrix} < 0,$$

então $K = L(\alpha)F^{-1}$ é um ganho estabilizante por realimentação de estados. O escalar ϵ deve ser buscado no conjunto dado em (4).

11. Condição de controle $\mathcal{H}_2$ baseada no seguinte teorema: Se existirem uma matriz $S(\alpha) = S(\alpha)' \in \mathcal{R}^{n\times n}$ matrizes $L(\alpha) \in \mathcal{R}^{m\times n}$, $G \in \mathcal{R}^{n\times n}$, $M \in \mathcal{R}^{p\times p}$ e um escalar λ dado tais que as seguintes LMIs robustas são verificadas para todo $\alpha \in \Lambda_N$

$$\begin{bmatrix} M & C_1(\alpha)G + D_2(\alpha)L(\alpha) \\ \star & S(\alpha) \end{bmatrix} > 0, \quad \begin{bmatrix} -2\epsilon S(\alpha) & 0_{n\times r} & S(\alpha) + G'(A(\alpha)' + \epsilon \mathrm{I}) + L(\alpha)'B_2(\alpha)' \\ \star & -\mathrm{I}_r & B_1(\alpha)' \\ \star & \star & -G - G' \end{bmatrix} < 0,$$

$\mathrm{Tr}(M) < \lambda$, então $K = L(\alpha)G^{-1}$ é um ganho estabilizante por realimentação de estados. A variável λ deve ser minimizada como função objetivo. O escalar ϵ deve ser buscado no conjunto dado em (4). Deverão ser usadas as seguintes matrizes extras: $B_1(\alpha) = 0.1\mathrm{I}_n$, $C_1(\alpha) = [1 \ 0_{1\times n-1}]$, $D_2(\alpha) = 0$. A dimensão r é o número de colunas da matriz $B_1(\alpha)$.

12. Condição apresentada em [Sha01]. O parâmetro escalar deve ser buscado no conjunto dado em (4).

13. Condição apresentada [OdOP11, Lemma 4]. O parâmetro escalar deve ser buscado no conjunto dado em (4).

Resultado do sorteio

Condição	Aluno
C1	Osvaldo
C2	Diego
C3	Gustavo
C4	Paulo
C5	Matheus
C6	Tábitha
C7	João
C8	Marcos
C9	Elmer
C10	Michael
C11	Rafael
C12	Pauline
C13	Vinícius

Apresentação dos resultados

O relatório final deve ser entregue em forma eletrônica (PDF) e deve contar as seguintes seções (além da identificação do aluno e da disciplina):

1. Definição do problema.

2. Método de síntese robusta. As condições do primeiro e segundo estágio devem ser apresentadas na forma de Teoremas com LMIs dependentes de parâmetros (todas as matrizes dependendo de α). Os códigos das relaxações devem ser apresentados como apêndices.

3. Resultados da aplicação das condições de estabilização robusta para realimentação de estados e de saída.

4. Conclusão.

Os resultados devem ser apresentados em forma de uma tabela com o seguinte formato:

		1^o estágio			2^o estágio R.E.			2^o estágio R.S.		
n	N	V	L	S.E.	V	L	S.E.	V	L	S.E.
2	2	·	·	·	·	·	·	·	·	·
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
5	5	·	·	·	·	·	·	·	·	·
				E_1			E_2			E_3
							E_4			E_5

sendo S.E. o número de sistemas estabilizados, R.E. realimentação de estados, R.S. realimentação de saída, V o número de variáveis escalares e L o número de linhas de LMIs. Os valores E_i são definidos da seguinte forma:

E_1 : Porcentagem de sistemas (no total) estabilizados no primeiro estágio.

E_2 : Porcentagem de sistemas (no total) estabilizados no segundo estágio por realimentação de estados.

E_3 : Porcentagem de sistemas (no total) estabilizados no segundo estágio por realimentação de saída.

E_4 : $100 \times (E_2/E_1)$

E_5 : $100 \times (E_3/E_1)$

Os valores E_4 e E_5 medem a eficiência do segundo estágio ignorando os casos em que o primeiro estágio não forneceu solução.

Avaliação e entrega

O relatório deverá ser entregue até o dia 15 de dezembro (quanto antes melhor). Deverá ser enviado por email com o campo "assunto" na seguinte forma: IA982 - etapa 2 - RA. A nota será composta da seguinte forma:

1. 85% em função resultados corretos.

2. 15% em função da legibilidade (identação e comentários) dos códigos fontes entregues e da qualidade da apresentação e conclusão dos resultados.

Atrasos implicarão em descontos na nota.

Bônus

1. Propor alguma mudança na condição do primeiro estágio que foi programada e refazer as simulações. Mudanças aceitas:

   (a) Aumentar o número de buscas do parâmetro escalar.

   (b) Alocar os polos à esquerda de um eixo vertical centrado em $-\sigma$. Para isso basta considerar $A(\alpha) = A(\alpha) + \sigma \mathrm{I}$. O valor de σ deve ser informado.

   (c) Nas condições envolvendo as normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$, o ganho pode ser computado para um valor do custo diferente do ótimo. Por exemplo, determina-se o valor do custo ótimo numa primeira execução, e depois calcula-se o ganho para um valor de custo dado, por exemplo, um valor 10% maior do que o ótimo. Valor do bônus: 1.0 ponto extra.

   Outras propostas deverão ser enviadas ao professor para avaliação.

2. Propor uma outra condição para o primeiro estágio diferente das 13 condições apresentadas e da estabilização quadrática. A condição deverá ser apresentada em forma de teorema. Refazer as simulações e apresentar os resultados. Valor do bônus: 1.0 ponto extra.

3. Adaptar as condições do primeiro e segundo estágios para tratar $K(\alpha)$ polinomial de grau 2 e refazer as simulações. Uma nova tabela de resultados, similar à primeira, deverá ser apresentada. Valor do bônus: 1.0 ponto extra.

Referências

[ATB01] P. Apkarian, H. D. Tuan, and J. Bernussou. Continuous-time analysis, eigenstructure assignment, and $\mathcal{H}_2$ synthesis with enhanced linear matrix inequalities (LMI) characterizations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(12):1941–1946, December 2001.

[dOOL$^+$04a] P. J. de Oliveira, R. C. L. F. Oliveira, V. J. S. Leite, V. F. Montagner, and P. L. D. Peres. $\mathcal{H}_2$ guaranteed cost computation by means of parameter dependent Lyapunov functions. *International Journal of Systems Science*, 35(5):305–315, April 2004.

[dOOL$^+$04b] P. J. de Oliveira, R. C. L. F. Oliveira, V. J. S. Leite, V. F. Montagner, and P. L. D. Peres. $\mathcal{H}_\infty$ guaranteed cost computation by means of parameter dependent Lyapunov functions. *Automatica*, 40(6):1053–1061, June 2004.

[HWS05] Y. He, M. Wu, and J. She. Improved Bounded-Real-Lemma representation and $\mathcal{H}_\infty$ control of systems with polytopic uncertainties. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 52(7):380–383, July 2005.

[OdOP11] R. C. L. F. Oliveira, M. C. de Oliveira, and P. L. D. Peres. Robust state feedback LMI methods for continuous-time linear systems: Discussions, extensions and numerical comparisons. In *Proceedings of the 2011 IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design*, pages 1038–1043, Denver, CO, USA, September 2011.

[ROC15] L. A. Rodrigues, R. C. L. F. Oliveira, and J. F. Camino. New extended LMI characterization for state feedback control of continuous-time uncertain linear systems. In *Proceedings of the 2015 European Control Conference*, pages 1992–1997, Linz, Austria, July 2015.

[RP01] D. C. W. Ramos and P. L. D. Peres. A less conservative LMI condition for the robust stability of discrete-time uncertain systems. *Systems & Control Letters*, 43(5):371–378, August 2001.

[Sha01] U. Shaked. Improved LMI representations for the analysis and the design of continuous-time systems with polytopic type uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(4):652–656, April 2001.

[VOP15] H. S. Vieira, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres. Robust stabilization and $\mathcal{H}_\infty$ control by means of state-feedback for polytopic linear systems using LMIs and scalar searches. In *Proceedings of the 2015 American Control Conference*, pages 5966–5973, Chicago, IL, USA, July 2015.

[Xie08] W. Xie. An equivalent LMI representation of Bounded Real Lemma for continuous-time systems. *Journal of Inequalities and Applications*, 2008(1):1–8, January 2008.