IA892 – Análise e Controle de Sistemas Lineares por Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs)

Trabalho Computacional — Segundo Semestre 2017

O objetivo deste trabalho é avaliar a estabilização robusta de sistemas politópicos discretos invariantes no tempo utilizando a técnica de dois estágios. Seja o sistema linear politópico

$$x(k+1) = A(\alpha)x(k) + B(\alpha)u(k) \tag{1}$$
$$y(k) = C(\alpha)x(k) \tag{2}$$

sendo $x \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estados, $u \in \mathbb{R}^m$ a entrada de controle e $y \in \mathbb{R}^p$ a saída medida. As matrizes dinâmica, de entrada e de saída do sistema são politópicas, isto é

$$A(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i A_i, \quad B(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i B_i, \quad C(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i C_i, \quad \alpha \in \Lambda_N$$

sendo Λ_N o simplex unitário. A seguinte lei de controle robusto é investigada

- Realimentação estática de saída: $u(t) = Ky(t)$

No primeiro estágio é gerada uma família de ganhos de realimentação de estados na forma

$$K(\alpha) = Z(\alpha)X^{-1} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i Z_i X^{-1} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i K_i$$

que são projetados por meio do seguinte lema.

Lema 1 *Se existirem matrizes $W(\alpha) = W(\alpha)'$, $Z(\alpha)$ e G, e um escalar $\xi \in (-1, 1)$ tais que $W(\alpha) > 0$ e*

$$\begin{bmatrix} \xi A(\alpha)G + \xi G' A(\alpha)' + \xi B(\alpha)Z(\alpha) + \xi Z(\alpha)' B(\alpha)' - W(\alpha) & \star \\ G' A(\alpha)' + Z(\alpha)' B(\alpha)' - \xi G & W(\alpha) - G - G' \end{bmatrix} < 0$$

para todo $\alpha \in \Lambda_N$, então $K(\alpha) = Z(\alpha)G^{-1}$ é um ganho por realimentação de estados tal que $A(\alpha) + B(\alpha)K(\alpha)$ é assintoticamente estável (autovalores dentro (estritamente) círculo unitário).

Ao variar-se o valor ξ nas condições do Lema 1 é possível obter ganhos estabilizantes diferentes para serem usados como parâmetros de entrada para o segundo estágio. Esse processo de geração de ganhos é apenas uma heurística.

Com o ganho $K(\alpha)$ em mãos, testa-se o segundo estágio. Neste trabalho testaremos quatro condições para o segundo estágio utilizando os seguintes teoremas.

Teorema 1 *Dado um ganho $K(\alpha) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ na forma afim tal que $A(\alpha) + B(\alpha)K(\alpha)$ é assintoticamente estável, existe um ganho robusto estabilizante de realimentação de saída K_s tal que $A(\alpha) + B(\alpha)K_sC(\alpha)$ é assintoticamente estável se existirem matrizes $P(\alpha) = P(\alpha)' \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $H \in \mathbb{R}^{m\times m}$ e $J \in \mathbb{R}^{m\times p}$ tais que*

$$\begin{bmatrix} P(\alpha) & A(\alpha)'P & 0 \\ \star & P(\alpha) & P(\alpha)B(\alpha) \\ \star & \star & 0 \end{bmatrix} + He\left(\begin{bmatrix} K(\alpha)' \\ 0 \\ -I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} JC(\alpha) & 0 & -H \end{bmatrix}\right) > 0, \tag{3}$$

para todo $\alpha \in \Lambda_N$, com $\mathrm{He}(X) = X + X'$. No caso afirmativo, o ganho robusto de realimentação é dado por $K_s = H^{-1}J$.

Teorema 2 *Dado um ganho $K(\alpha) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ na forma afim tal que $A(\alpha) + B(\alpha)K(\alpha)$ é assintoticamente estável, existe um ganho robusto estabilizante de realimentação de saída K_s tal que $A(\alpha) + B(\alpha)K_sC(\alpha)$ é assintoticamente estável se existirem matrizes $P(\alpha) = P(\alpha)' \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $H \in \mathbb{R}^{m\times m}$ e $J \in \mathbb{R}^{m\times p}$ tais que*

$$\begin{bmatrix} P(\alpha) & \left(A(\alpha)' + K(\alpha)'B(\alpha)'\right)P(\alpha) & 0 \\ \star & P(\alpha) & P(\alpha)B(\alpha) \\ \star & \star & 0 \end{bmatrix} + He\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} JC(\alpha) - HK(\alpha) & 0 & -H \end{bmatrix}\right) > 0, \tag{4}$$

para todo $\alpha \in \Lambda_N$, com $\mathrm{He}(X) = X + X'$. No caso afirmativo, o ganho robusto de realimentação é dado por $K_s = H^{-1}J$.

Teorema 3 *Dado um ganho $K(\alpha) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ na forma afim tal que $A(\alpha) + B(\alpha)K(\alpha)$ é assintoticamente estável, existe um ganho robusto estabilizante de realimentação de saída K_s tal que $A(\alpha) + B(\alpha)K_sC(\alpha)$ é assintoticamente estável se existirem matrizes $0 < P(\alpha) = P(\alpha)' \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $F(\alpha) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $G(\alpha) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $H \in \mathbb{R}^{m\times m}$ e $J \in \mathbb{R}^{m\times p}$ tais que*

$$\begin{bmatrix} He\left(F(\alpha)\left(A(\alpha) + B(\alpha)K(\alpha)\right)\right) - P(\alpha) & -F(\alpha) + \left(A(\alpha) + B(\alpha)K(\alpha)\right)'G(\alpha)' & F(\alpha)B(\alpha) \\ \star & P(\alpha) - G(\alpha) - G(\alpha)' & G(\alpha)B(\alpha) \\ \star & \star & 0 \end{bmatrix}$$
$$+He\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} JC(\alpha) - HK(\alpha) & 0 & -H \end{bmatrix}\right) < 0, \tag{5}$$

para todo $\alpha \in \Lambda_N$, com $\mathrm{He}(X) = X + X'$. No caso afirmativo, o ganho robusto de realimentação é dado por $K_s = H^{-1}J$.

Teorema 4 *Dado um ganho $K(\alpha) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ na forma afim tal que $A(\alpha) + B(\alpha)K(\alpha)$ é assintoticamente estável, existe um ganho robusto estabilizante de realimentação de saída K_s tal que $A(\alpha) + B(\alpha)K_sC(\alpha)$ é assintoticamente estável se existirem matrizes $0 < P(\alpha) = P(\alpha)' \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $F(\alpha) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $G(\alpha) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $H \in \mathbb{R}^{m\times m}$ e $J \in \mathbb{R}^{m\times p}$ tais que*

$$\begin{bmatrix} He\left(F(\alpha)A(\alpha)\right) - P(\alpha) & -F(\alpha) + A(\alpha)'G(\alpha)' & F(\alpha)B(\alpha) \\ \star & P(\alpha) - G(\alpha) - G(\alpha)' & G(\alpha)B(\alpha) \\ \star & \star & 0 \end{bmatrix}$$
$$+He\left(\begin{bmatrix} K(\alpha)' \\ 0 \\ -I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} JC(\alpha) & 0 & -H \end{bmatrix}\right) < 0, \tag{6}$$

para todo $\alpha \in \Lambda_N$, com $\mathrm{He}(X) = X + X'$. No caso afirmativo, o ganho robusto de realimentação é dado por $K_s = H^{-1}J$.

Programação

As cinco condições de síntese deverão ser programadas usando o *toolbox* ROLMIP (Robust LMI Parser), disponível para download em

`http://www.dt.fee.unicamp.br/~agulhari/rolmip/rolmip.htm`

A função referente ao primeiro estágio deve ser programada com a estrutura

```
function output = primeiroEstagio(A,B,xi)
```

em que A, B são as matrizes do sistema fornecidas em estruturas celulares, e `xi` é um escalar dado. A variável de saída deverá ter pelo menos dois campos

```
output.feas
output.Ke
```

em que `output.feas` indica factibilidade ou não, e `output.Ke` é o ganho estabilizante (caso tenha sido encontrado), em uma estrutura celular ou `rolmipvar`. A condição deverá ser testada para os seguintes valores de ξ (10 valores no total)

$$\xi \in \{-0.9, -0.675, -0.45, -0.225, 0, 0.225, 0.45, 0.675, 0.9\}$$

Para cada valor de ξ testado que forneça um ganho factível, testa-se o segundo estágio. Se o segundo estágio também fornecer uma solução, computa-se o sistema como estabilizado e encerra-se a busca. Caso contrário testa-se o próximo ξ e repete-se o procedimento até o segundo estágio achar uma solução (ou não, nesse caso o sistema é considerado como não estabilizável).

A função referente ao segundo estágio deve ser programada com a estrutura

```
function output = segundoEstagio_Ti(A,B,C,K)
```

em que A, B e C são as matrizes do sistema fornecidas em estruturas celulares, K é o ganho de realimentação de estados determinado no primeiro estágio e Ti refere-se ao Teorema i, $i = 1, \ldots, 4$. A variável de saída deverá ter pelo menos dois campos

```
output.feas
output.Ks
```

em que `output.feas` indica factibilidade ou não, e `output.Ks` é o ganho estabilizante por realimentação de saída (caso tenha sido encontrado).

Base de sistemas

Após a programação das condições, o próximo passo é testar a eficácia do método baseado em dois estágios. As condições de síntese (pares (Lema 1,Teorema i)) são aplicadas em uma base de dados de sistemas politópicos instáveis que garantidamente admitem um ganho robusto estabilizante por realimentação estática de saída. São consideradas as seguintes dimensões

$$n \in \{3, 4, 5\}, \quad (m, p) \in \{(1, 1), (2, 2)\}, \quad N \in \{2, 4\}$$

e para cada combinação das dimensões são gerados 100 sistemas (total de 1200).

A construção da base de dados segue a lógica

- Gera-se uma matriz randômica $A(\alpha)$ Schur estável.
- Gera-se matrizes randômicas $B(\alpha)$ e $C(\alpha)$.
- Procura-se por um ganho randômico K tal que $A(\alpha) - B(\alpha)KC(\alpha)$ é instável.
- A seguinte tripla $(\hat{A}(\alpha), B(\alpha), C(\alpha))$, com $\hat{A}(\alpha) = A(\alpha) - B(\alpha)KC(\alpha)$ é introduzida na base.

Para garantir que os sistemas gerados são "difíceis" de serem estabilizados, a condição apresentada a seguir deve necessariamente falhar para a tripla $(\hat{A}(\alpha), B(\alpha), C(\alpha))$.

Lema 2 *Se existirem matrizes $P(\alpha) = P(\alpha)' \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Z \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $G \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que*

$$\begin{bmatrix} P(\alpha) & A(\alpha)G + B(\alpha)Z \\ \star & G + G' - P(\alpha) \end{bmatrix} > 0, \tag{7}$$

para todo $\alpha \in \Lambda_N$, com

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & 0 \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix},\ G_{11} \in \mathbb{R}^{p\times p},\ G_{21} \in \mathbb{R}^{n-p\times p},\ G_{22} \in \mathbb{R}^{n-p\times n-p}, \quad Z = \begin{bmatrix} Z_1 & 0 \end{bmatrix},\ Z_1 \in \mathbb{R}^{m\times p},$$

então $K = Z_1 G_{11}^{-1}$ é um ganho robusto de realimentação de saída.

Para facilitar o trabalho de programação, está disponível em

`http://www.dt.fee.unicamp.br/~ricfow/IA892/criaBase.m`

um script preparado para gerar a base. O único trabalho a ser realizado é ajustar a geração das matrizes randômicas. Por exemplo, aplicando uma escala, anulando alguns elementos, etc. Importante: o tempo necessário para gerar a base inteira pode depender de como as matrizes são geradas. No final será gerado um arquivo com o nome `DB_sof_RA.mat` sendo RA o registro acadêmico do aluno.

Leitura e teste da base de dados

Com o arquivo `DB_sof_RA.mat` em mãos, o seguinte código pode ser utilizando para testar a base de dados com as condições de síntese.

```
xis= linspace(-0.9,0.9,9);
load('DB_sof_RA.mat');
output.tabela = [];
for d=1:size(dimensoes,1)
    ordem    = dimensoes(d,1);
    entradas = dimensoes(d,2);
    saidas   = dimensoes(d,3);
    vertices = dimensoes(d,4);
    placar = [0 0];
    for i= 1:totalSistemas
        A = BASE{ordem,entradas,saidas,vertices,i}.A;
        B = BASE{ordem,entradas,saidas,vertices,i}.B;
        C = BASE{ordem,entradas,saidas,vertices,i}.C;
        feas=[0 0];
        for xi=xis,
```

```
            stage1 = primeiroEstagio(A,B,'xi',xi);
            if stage1.feas
                feas = [1 0];
                stage2 = segundoEstagio_Ti(A,B,C,stage1.K);
                if stage2.feas
                    feas=[1 1];
                    break;
                end
            end
        end
        placar = placar + feas;
    end
    fprintf('terminei [%d %d %d %d] - [%d %d]\n',ordem,entradas,saidas,vertices,placar(1
    output.tabela = [output.tabela; [ordem,entradas,saidas,vertices,placar(1),placar(2)]
end
```

Apresentação dos resultados

O relatório final deve ser entregue em forma eletrônica (PDF) e deve conter

1. Identificação do aluno.
2. Resultados da aplicação das condições de estabilização robusta para realimentação de saída. Uma breve conclusão sobre o compromisso entre esforço computacional e eficácia dos métodos.
3. Apêndices contendo todos os códigos utilizados.

Os resultados devem ser apresentados em forma de uma tabela com o seguinte formato:

	Lema 1			T1			T2			T3			T4		
(n, m, p, N)	V	L	S.E.	V	L	S.E.	V	L	S.E.	V	L	S.E.	V	L	S.E.
(3,1,1,2)	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
(5,2,2,4)	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
			P_1			E_1			E_2			E_3			E_4
						$\hat{E}_1$			$\hat{E}_2$			$\hat{E}_3$			$\hat{E}_4$

sendo S.E. o número de sistemas estabilizados, V o número de variáveis escalares e L o número de linhas de LMIs e

P_1 : Porcentagem de sistemas (no total) estabilizados no primeiro estágio.

E_i : Porcentagem de sistemas (no total) estabilizados no segundo estágio pela condição do Teorema i.

$\hat{E}_i$: $100 \times (E_i/P_1)$

Os valores $\hat{E}_i$ medem a eficiência do segundo estágio ignorando os casos em que o primeiro estágio não forneceu solução.

Também deverá ser apresentada uma tabela contendo o número total de sistemas estabilizados para cada um dos valores de ξ. Em princípio os valores obtidos podem mudar em função da ordem em que os valores de ξ são testados.

	ξ								
	-0.9	-0.675	-0.45	-0.225	0	0.225	0.45	0.675	0.9
T1									
T2									
T3									
T4									

Avaliação e entrega

O relatório deverá ser entregue até o dia 10 de dezembro. Deverá ser enviado por email com o campo "assunto" na seguinte forma: IA982 - Trabalho - RA. Atrasos implicarão em descontos na nota.

Bônus1

Para o caso $n = 3$, $m = p = 1$, $N = 4$, testar a base inteira para algum Teorema i (escolha livremente) para cada valor de ξ e reportar os resultados. Valor do bônus: 10 pontos (escala de 0 a 100).

Bônus2

Propor alguma mudança na condição do primeiro estágio que foi programada (aumentar os valores de ξ não será aceito como mudança), refazer as simulações com algum Teorema i e apresentar resultados melhores do que os obtidos com o primeiro estágio estabelecido no trabalho. "Melhores" indica que o número total de sistemas estabilizados deve ser maior (pelo menos 1 a mais). Uma nova tabela deve ser apresentada. Valor do bônus: 10 pontos.