IA892 – Análise e Controle de Sistemas Lineares por Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs)

Trabalho Computacional — Segundo Semestre 2018

O objetivo deste trabalho é avaliar a estabilização robusta de sistemas politópicos invariantes no tempo utilizando uma técnica de dois estágios. Seja o sistema linear politópico

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u(t) \\ y(t) &= C(\alpha)x(t) \end{aligned} \tag{1}$$

sendo $x \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estados, $u \in \mathbb{R}^m$ a entrada de controle e $y \in \mathbb{R}^p$ a saída medida. As matrizes dinâmica, de entrada e de saída do sistema são politópicas, isto é

$$A(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i A_i, \quad B(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i B_i, \quad C(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i C_i, \quad \alpha \in \Lambda_N$$

sendo Λ_N o simplex unitário. A seguinte lei de controle por realimentação dinâmica de saída de ordem completa (ou seja, $x_c \in \mathbb{E}^n$) é projetada

$$\begin{aligned} \dot{x}_c(t) &= A_c x_c(t) + B_c y(t) \\ u(t) &= C_c x(t) \end{aligned} \tag{2}$$

em que A_c, B_c e C_c são as matrizes do controlador. Para facilitar o projeto, a matriz de transmissão direta do controlador D_c não é considerada (controlador estritamente próprio). Também é considerada outra hipótese simplificadora, analisada em duas situações:

- A matriz C_c é dada e igual a um ganho robusto de realimentação de estados para o sistema (1), ou seja, C_c é tal que $A(\alpha) + B(\alpha)C_c$ é assintoticamente estável para todo $\alpha \in \Lambda_N$.
- A matriz B_c é dada e igual a um ganho robusto de observação de estados para o sistema (1), ou seja, B_c é tal que $A(\alpha) + B_c C(\alpha)$ é assintoticamente estável para todo $\alpha \in \Lambda_N$.

Assim, no primeiro estágio do projeto é gerada uma família de ganhos de realimentação de estados K e observação de estados L, que servem como ponto de partida para o segundo estágio.

Para projetar o ganho K de realimentação de estados, o seguinte lema é utilizado.

Lema 1 *Se existerem uma matriz simétrica $P(\alpha) = P(\alpha)'$, matrizes Z e X, e um escalar ξ positivo tais que $P(\alpha) > 0$ e*

$$\begin{bmatrix} A(\alpha)X + X'A(\alpha)' + B(\alpha)Z + Z'B(\alpha)' & P(\alpha) - X' + \xi A(\alpha)X + \xi B(\alpha)Z \\ \star & -\xi X - \xi X' \end{bmatrix} < 0$$

para todo $\alpha \in \Lambda_N$, então $K = ZX^{-1}$ é um ganho por realimentação de estados tal que $A(\alpha) + B(\alpha)K$ é assintoticamente estável.

Para projetar o ganho L de observação de estados, o seguinte lema é utilizado.

Lema 2 *Se existe uma matriz simétrica $P(\alpha) = P(\alpha)'$ e matrizes Z e X, e um escalar ξ positivo tais que $P(\alpha) > 0$ e*

$$\begin{bmatrix} XA(\alpha) + A(\alpha)'X' + ZC(\alpha) + C(\alpha)'Z' & P(\alpha) - X + \xi A(\alpha)'X' + \xi C(\alpha)'Z' \\ \star & -\xi X - \xi X' \end{bmatrix} < 0$$

para todo $\alpha \in \Lambda_N$, então $L = X^{-1}Z$ é um ganho de observação de estados tal que $A(\alpha) + LC(\alpha)$ é assintoticamente estável.

Ao variar-se o valor de ξ nas condições dos Lemas 1 e 2 é possível obter ganhos estabilizantes diferentes para serem usados como parâmetros de entrada para o segundo estágio. Esse processo de geração de ganhos é apenas uma heurística.

Com os ganhos K e L em mãos, testa-se o segundo estágio. O próximo teorema é o segundo estágio considerando que $C_c = K$ está fixa.

Teorema 1 *Dados um ganho $C_c \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e um escalar ζ positivo. Se existirem matrizes $P(\alpha) = P(\alpha)' \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$, $V, H, Q, Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $G \in \mathbb{R}^{n\times p}$ tais que $P(\alpha) > 0$ e*

$$\begin{bmatrix} T(\alpha) + T(\alpha)' & P(\alpha) - J' + \zeta T(\alpha) \\ \star & -\zeta(J + J') \end{bmatrix} < 0 \tag{3}$$

com

$$T(\alpha) = \begin{bmatrix} Q\big(A(\alpha) + B(\alpha)C_c\big) & QA(\alpha) \\ Y\big(A(\alpha) + B(\alpha)C_c\big) + GC(\alpha) + H & YA(\alpha) + GC(\alpha) \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} Q & Q \\ Y + V & Y \end{bmatrix}$$

para todo $\alpha \in \Lambda_N$, então $A_c = V^{-1}H$, $B_c = V^{-1}G$ e C_c garantem que o controlador robusto (2) estabiliza robustamente o sistema (1).

O próximo teorema é o segundo estágio considerando que $B_c = L$ está fixa.

Teorema 2 *Dados um ganho $B_c \in \mathbb{R}^{n\times p}$ e um escalar ζ positivo. Se existirem matrizes $P(\alpha) = P(\alpha)' \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$, $V, H, Q, Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $G \in \mathbb{R}^{n\times m}$ tais que $P(\alpha) > 0$ e (3) com*

$$T(\alpha) = \begin{bmatrix} Q\big(A(\alpha)' + C(\alpha)'B_c'\big) & QA(\alpha)' \\ Y\big(A(\alpha)' + C(\alpha)'B_c'\big) + GB(\alpha)' + H & YA(\alpha)' + GB(\alpha)' \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} Q & Q \\ Y + V & Y \end{bmatrix}$$

para todo $\alpha \in \Lambda_N$, então $A_c = V^{-1}H$, $C_c = V^{-1}G$ e B_c garantem que o controlador robusto (2) estabiliza robustamente o sistema (1).

Programação

Todas as condições de síntese devem ser programadas usando o *toolbox* ROLMIP (Robust LMI Parser), disponível para *download* em

`https://rolmip.github.io/`

As funções referentes ao primeiro estágio devem ser programadas com a estrutura

```
function output = primeiroEstagioK(A,B,xi)

function output = primeiroEstagioL(A,C,zeta)
```

em que A, B e C são as matrizes do sistema fornecidas em estruturas celulares, e `xi` e `zeta` são escalares dados. A variável de saída deve ter pelo menos dois campos

```
output.feas
output.Ke ou output.Le
```

em que `output.feas` indica factibilidade ou não (por exemplo, 1 é factível, 0 não), e `output.Ke` é o ganho estabilizante (caso tenha sido encontrado) de realimentação de estados e `output.Le` é o ganho estabilizante (caso tenha sido encontrado) de observação de estados. As condições devem ser testadas para os seguintes valores de ξ

$$\xi \in \{10^{-5}, 10^{-3}, 10^{-1}, 1\}$$

Para cada valor de ξ testado que forneça um ganho factível, testa-se o segundo estágio correspondente considerando os mesmos valores para ζ. Consequentemente, considerando os dois estágios, ocorrem no máximo $4 \times 4 = 16$ condições LMIs testadas. Se o segundo estágio também fornecer uma solução, computa-se o sistema como estabilizado e encerra-se a busca. Caso contrário testa-se o próximo ξ e repete-se o procedimento até o segundo estágio achar uma solução (ou não, e nesse caso o sistema é considerado como não estabilizável).

As funções referentes aos segundos estágios devem ser programadas de acordo com as estruturas

```
function output = segundoEstagio_Cc(A,B,C,K)

function output = segundoEstagio_Bc(A,B,C,L)
```

em que A, B e C são as matrizes do sistema fornecidas em estruturas celulares, K é o ganho de realimentação de estados determinado no primeiro estágio e L é o ganho de observação de estados determinado no primeiro estágio. Note que os segundos estágios devem ser testados para os quatro valores de ζ. A variável de saída deve ter pelo menos três campos

```
output.feas
output.Ac
output.Bc ou output.Cc
```

em que `output.feas` indica factibilidade ou não, e `output.Ac`, `output.Bc` e `output.Cc`, são as matrizes do controlador dinâmico estabilizante (em caso de factibilidade).

Base de sistemas

Após a programação das condições, o próximo passo é testar a eficácia do método. As condições de síntese (pares (Lema 1,Teorema 1) e (Lema 2,Teorema 12) são aplicadas em uma base de dados de sistemas politópicos instáveis que garantidamente podem ser estabilizados pelo controlador dinâmico (2). São consideradas as seguintes dimensões para os sistemas

$$n \in \{3, 4, 5\}, \quad (m, p) \in \{(1, 1)\}, \quad N \in \{2, 3, 4\}$$

e para cada combinação das dimensões são gerados 100 sistemas (total de 1200).

A base dados pode ser baixada no endereço:

`http://www.dt.fee.unicamp.br/~ricfow/IA892/baseTrabalho2018.zip`

Leitura e teste da base de dados

Com o arquivo `DB_dof.mat` em mãos, o seguinte código pode ser utilizado para testar a base de dados com as condições de síntese apresentadas anteriormente.

```
xis= [1e-5 1e-1 1];
load('DB_dof.mat');
output.tabela = [];
for d=1:size(dimensoes,1)
    ordem    = dimensoes(d,1);
    entradas = dimensoes(d,2);
    saidas   = dimensoes(d,3);
    vertices = dimensoes(d,4);
    placar = [0 0];
    for i= 1:totalSistemas
        A = BASE{ordem,entradas,saidas,vertices,i}.A;
        B = BASE{ordem,entradas,saidas,vertices,i}.B;
        C = BASE{ordem,entradas,saidas,vertices,i}.C;
        feas=[0 0];
        for xi=xis,
            stage1 = primeiroEstagioK(A,B,'xi',xi);
            if stage1.feas
                feas = [1 0];
                stage2 = segundoEstagio_Cc(A,B,C,stage1.K);
                if stage2.feas
                    feas=[1 1];
                    break;
                end
            end
        end
        placar = placar + feas;
    end
    fprintf('terminei [%d %d %d %d] - [%d %d]\n',ordem,entradas,saidas,vertices,placar(1
    output.tabela = [output.tabela; [ordem,entradas,saidas,vertices,placar(1),placar(2)]
end
```

O mesmo código pode ser utilizado para testar o par (Lema 2,Teorema 2).

Apresentação dos resultados

O relatório final deve ser entregue em forma eletrônica (PDF), contendo

1. Identificação do aluno.
2. Resultados da aplicação das condições de estabilização robusta para realimentação dinâmica de saída. Uma breve conclusão sobre os resultados obtidos.
3. Apêndices contendo <u>todos</u> os códigos utilizados.

Os resultados devem ser apresentados em forma de uma tabela com o seguinte formato:

	L1			T1			L2			T2		
(n, m, p, N)	V	L	SE	V	L	SE	V	L	SE	V	L	SE
(3,1,1,2)	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
(5,2,2,4)	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
			P_1			E_1			P_2			E_2
						$\hat{E}_1$						$\hat{E}_2$

sendo SE o número de sistemas estabilizados, V o número de variáveis escalares e L o número de linhas de LMIs e

P_i : Porcentagem de sistemas (no total) estabilizados no primeiro estágio (Lema i).

E_i : Porcentagem de sistemas (no total) estabilizados no segundo estágio pela condição do Teorema i.

$\hat{E}_i$: $100 \times (E_i/P_i)$

Os valores $\hat{E}_i$ medem a eficiência do segundo estágio ignorando os casos em que o primeiro estágio não forneceu solução.

Também deve ser apresentada uma tabela contendo as mesmas informações mas considerando $\xi = \zeta = 1$, ou seja, sem realizar nenhuma busca nos escalares. É esperado que a taxa de estabilização diminua, embora o tempo computacional seja menor.

Avaliação e entrega

O relatório deve ser entregue até o dia 10 de dezembro. O arquivo deve ser enviado por email para `ricfow@dt.fee.unicamp.br` com o campo "assunto" na seguinte forma: IA982 - Trabalho - RA. Atrasos implicam em descontos na nota (15% ao dia).

Opcional - Pontos Extras

Para o par (Lema 1,Teorema 1), adaptar o primeiro estágio para gerar um ganho de realimentação de estados $K(\alpha)$ com dependência afim em α. Por exemplo, fazendo

$$Z(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i Z_i$$

Fazer as modificações necessárias no segundo estágio e reportar os resultados para a base de dados. Houve melhora ou piora na taxa de estabilização? Motivação desta investigação: embora o controlador resultante seja $(A_c, B_c, C_c(\alpha))$, isto é, não implementável, poderíamos considerar um terceiro estágio, em que entraríamos com A_c, B_c, agora conhecidos, e procuraríamos por um C_c que não depende de α.